2015. II. 16.

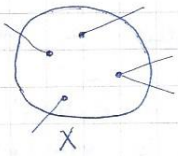
# Véges matematika 2

**Definíció.** Legyen $G(V,E)$ egyszerű gráf.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\alpha(G)$ = | maximális főtlen ponthalmaz | (nincs köztük él) | (stabilitási szám) |
| $\varrho(G)$ = | minimális lefogó élhalmaz | (minden pontot lefedjenek) | ha $G$-ben nincs izolált pont |
| $\tau(G)$ = | minimális lefogó ponthalmaz | ($\forall$ él legalább egyik végpontja) | |
| $\nu(G)$ = | maximális független élhalmaz | (nincs közös pontjuk) | (párosítás) |

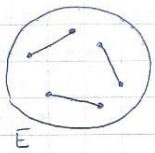
## Erdős–Gallai-tételek:

**Tétel.** $\alpha(G) \le \varrho(G)$




B: Legyen $X \subset V$ főtlen.
Ha $F$ lefogó élhalmaz, akkor $X$-et is lefogja. De minden él csak 1-et foghat le, mert $X$ főtlen. $\Rightarrow |X| \le |F|$.
Ez $\forall X$, $\forall F$-re igaz $\rightarrow$ ha $X$ max, $F$ min, akkor is igaz. □

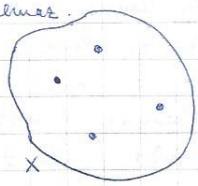
**Tétel.** $\nu(G) \le \tau(G)$




B: Legyen $M \subset E$ főtlen élek halmaza.
Ha $Y$ lefogó ponthalmaz, akkor $E$ minden élének legalább 1 végpontja benne van.
$\Rightarrow |M| \le |Y| \Rightarrow \nu(G) \le \tau(G)$. □

**Tétel.** Legyen $|V| = n$. Ekkor $\tau(G) + \alpha(G) = n$.

B: **Állítás.** Ha $X \subset V$ főtlen ponthalmaz $\Leftrightarrow$ $V \setminus X$ lefogó ponthalmaz.



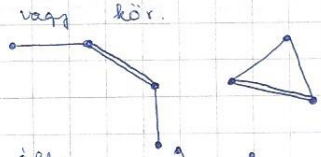

B: $X$-en belül nincs él $\rightarrow$ $\forall$ él legalább 1 végpontja $V \setminus X$-ben van. És ez visszafele is igaz. □

Legyen $X \subset V$ főtlen. $\Rightarrow \tau(G) \le |V - X|$
Legyen $X$ maximális méretű! $\Rightarrow \tau(G) \le n - \alpha(G)$
$\Rightarrow \tau(G) + \alpha(G) \le n$. (ez az egyik irány).
Legyen $Y \subset V$ lefogó $\Rightarrow$ $V \setminus Y$ főtlen. $\Rightarrow \alpha(G) \ge |V \setminus Y|$
Legyen $|Y| = \tau(G)$ $\Rightarrow$ $\alpha(G) \ge n - \tau(G)$ $\Rightarrow$ $\tau(G) + \alpha(G) \ge n$. $\Rightarrow$ (=) □

**Tétel.** $\nu(G) + \varrho(G) = n$, ha nincs izolált pont $G$-ben.

B: Legyen $A \subset E$ független élhalmaz, $|A| = \nu = \varrho(G)$.
Ez pontosan $2 \cdot \nu(G)$ pontot fog le.
A többi pont mindenképpen lefogható úgy, hogy $\forall$ pontot 1 élet veszünk.
$\Rightarrow n - 2\nu(G)$ él
Összesen $\nu(G) + n - 2\nu(G) = n - \nu(G)$ biztosan elég a lefogáshoz.
$\Rightarrow n - \nu(G) \ge \varrho(G)$ $\Rightarrow$ $n \ge \nu(G) + \varrho(G)$.

Legyen $B \subset E$ min. lef. élhalmaz, $|B| = \varrho(G)$.
**Állítás.** $B$-ben nincs 3 hosszú út vagy kör.



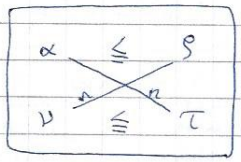
B: A duplán rajzolt élek feleslegesek. □

**Állítás.** $AB$ gráf pontdisjunkt csillagokból áll.

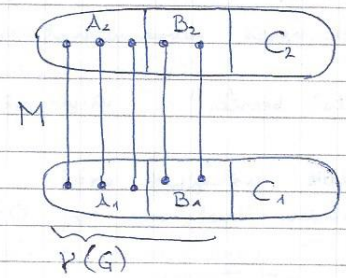


B: Két él ekvivalens, ha van közös pontjuk. (reflexív, szimmetrikus ✓)
A fenti áll. miatt tranzitív is □

Legyen a csillagok száma $k \longrightarrow k$ komponensű erdő.
Az élszám: $n-k$ miatt. $\longrightarrow n-k = \varrho(G)$
$\forall$ csillagból vegyünk ki 1 élet $\longrightarrow$ ez egy ftlen élhalmaz $k$ éllel.
$\Rightarrow \nu(G) \geqslant k. \Rightarrow \nu(G) \geqslant n - \varrho(G) \Rightarrow \nu(G) + \varrho(G) \geqslant n. \Rightarrow$ ⊜ □




Tétel. (König — Egerváry) Páros gráfra $\nu(G) = \tau(G)$.
B: Tudjuk, hogy $\nu(G) \leq \tau(G)$. Kell: $\nu(G) \geqslant \tau(G)$.




$B_2$: elvehető $C_1$-ből alt. úttal,
$B_1$: — u — $C_2$-ből — " —

Tudjuk, hogy ilyen élek nem lehetnek: $C_1 - C_2$
$C_1 - A_2$
$C_2 - A_1$
$B_1 - A_2$
$B_2 - A_1$
$C_2 - B_1$
$C_1 - B_2$

$\Downarrow$

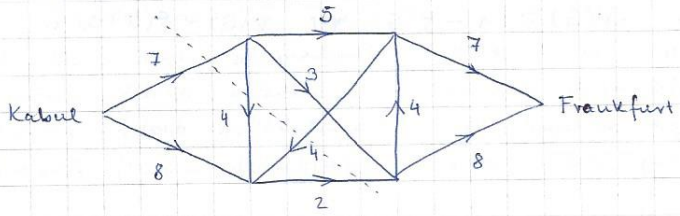
$A_1 \cup B_2$ lefogó halmaz.

$\Downarrow$

$\tau(G) \leq |A_1| + |B_2| = |M| = \nu(G)$ ✓ □

Következmény. Páros gráfban $\alpha(G) = \varrho(G)$, ha $G$-ben nincs izolált pont.
B: $\alpha(G) + \tau(G) = \varrho(G) + \nu(G) = n$. □

# Hálózati folyamok




Heroint szeretnék Kabulból Frankfurtba. (minél többet!)
Az egyes útvonalszakaszoknak kapacitása van.

Felső becslés a vágás alapján: 9-nél többet nem lehet.

Adott irányított gráf: $(a,b)$ él $\quad a \longrightarrow b$,
Minden élnek van egy $0 \le K(e)$ kapacitása. (Ha negatív, nem kötünk be)

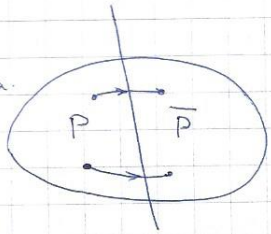
$Be(x)$: élek, amik $x$-be mennek be,
$Ki(x)$: $x$-ből kimenő élek.

**Def.** $a-z$ folyam egy $\varphi(e)$ függvény $(\varphi: E \to \mathbb{R}_{\ge 0})$
1) $0 \le \varphi(e) \le K(e)$
2) $x \neq a,z \implies \sum_{e \in Be(x)} \varphi(e) = \sum_{e \in Ki(x)} \varphi(e)$ Anyagmegmaradás tv.

A feladat: $\max_{\text{Va-z folyamra}} \left( \sum_{e \in Ki(a)} \varphi(e) - \underbrace{\sum_{e \in Be(a)} \varphi(e)}_{\text{ez a tag bizonyos körülmények között nincs ott}} \right)$

Legyen $P \subset V$, $\overline{P} = V \setminus P$.

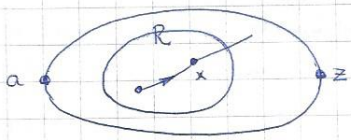
**Def.** $P, \overline{P}$ vágás: $P$-ből $\overline{P}$-ba menő irányított élek halmaza.




**Tétel.** $K(P,\overline{P}) = \sum_{e \in (P,\overline{P})} K(e)$. Speciálisan ha $a \in P$, $z \in \overline{P}$, akkor ez $a-z$ vágás.

B: Összegezzük 2)-t. $\forall x \in R \subseteq V \setminus \{a,z\}$.

$$\sum_{x \in R} \sum_{e \in Be(x)} \varphi(e) = \sum_{x \in R} \sum_{e \in Ki(x)} \varphi(e).$$




Az $R$-en belüli élek mindkét oldalon szerepelnek $\longrightarrow$ ha $e=(u,v)$, $u,v \in R$ akkor elhagyhatók.

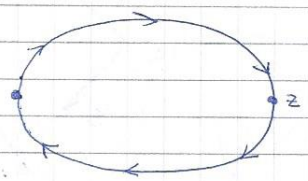
**Lemma.** Ha $a,z \notin R \implies \sum_{e \in (R,\overline{R})} \varphi(e) = \sum_{e \in (\overline{R},R)} \varphi(e)$ (ami bemegy $R$-be, az ki is jön onnan)

B: Ismert.

**Tétel.** Az $a-z$ folyamra $\sum_{e\in Ki(a)} \varphi(e) - \sum_{e\in Be(a)} \varphi(e) = \sum_{e\in Be(z)} \varphi(e) - \sum_{e\in Ki(z)} \varphi(e)$

B: 1) Nincs él $a$ és $z$ között. Használjuk a lemmát

$R = V - \{a,z\}$-re $\longrightarrow$ $\overline{R} = \{a,z\}$.




$$\sum_{\substack{e=(a,x)\\ \vee\, e=(z,x)}} \varphi(e) = \sum_{\substack{e=(x,a)\\ \vee\, e=(x,z)}} \varphi(e) \longrightarrow \text{átrendezve épp a tétel állítása:}$$

$$\sum_{Ki(a)} \varphi(e) + \sum_{Ki(z)} \varphi(e) = \sum_{Be(a)} \varphi(e) + \sum_{Be(z)} \varphi(e). \quad \checkmark$$

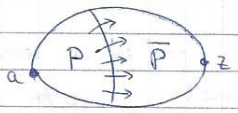
2) Ha $(a,z)\in E$. $\rightarrow$ Vegyük el ezt az élet $\longrightarrow$ a maradékra 1) miatt igaz.
Most mindkét oldalhoz hozzáadunk $\varphi(a,z)$-t.

3) Ugyanez $(z,a)\in E$-re. □

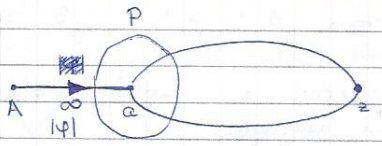
**Def.** $|\varphi|$ = a folyam értéke

Megjegyzés. $|\varphi| = \sum_{Ki(a)} \varphi(e) - \sum_{Be(a)} \varphi(e) \leqq \sum_{e\in Ki(a)} K(e)$. (Ez egy triviális vágás, $P=\{a\}$-val.)

**Tétel.** Ha $(P,\overline{P})$ egy $a-z$ vágás, $\Rightarrow |\varphi| \leq K(P,\overline{P})$.




B: Bevezetünk egy új forrást: $A$.
Legyen $\varphi(A,a) = |\varphi|$, $K(A,a) = \infty$ (vagy pl. a többi $\varphi$ összege).
Tehát ez is folyam $A$-ból $z$-be.
Alkalmazzuk a lemmát: $R = \{a\}$




$$|\varphi| \leq \sum_{e\in(\overline{P},P)} \varphi(e) = \sum_{e\in(P,\overline{P})} \varphi(e) \leq \sum_{e\in(P,\overline{P})} K(e) = K(P,\overline{P})$$

mert $|\varphi| = \varphi(A,a)$ és $(A,a)\in(\overline{P},P)$

Még meg kell nézni, mikor van egyenlőség. □

02.23.

Egyenlőség $\Leftrightarrow$ $|\varphi| = \sum_{(\overline{P},P)} \varphi(e)$ $\wedge$ $\sum_{(P,\overline{P})} K(e) = \sum_{(P,\overline{P})} \varphi(e)$

$\Updownarrow$ Ha minden $a$-ba menő eredeti élre $\varphi(e) = 0$.

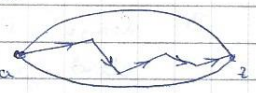
$\Updownarrow$ Minden élet maximálisan kihasználunk: $K(e) = \varphi(e)$.

**Lemma.** $\varphi_1$, $\varphi_2$ $a-z$ folyamok és $\varphi_1(e) + \varphi_2(e) \leq K(e)$ $\forall e$ $\Rightarrow$ $\varphi_1+\varphi_2$ is $a-z$ folyam.

B: trivi. □

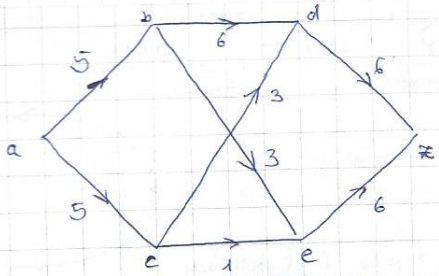
**Lemma.** Legyen $L$ irányított $a\to z$ út és $K(e)\geq 1$ ezekre az élekre
$\Rightarrow$ $L$ elemeire $\varphi(e)=1$, a többire $\varphi(e)=0$ $a-z$ folyam.

P: trivi.



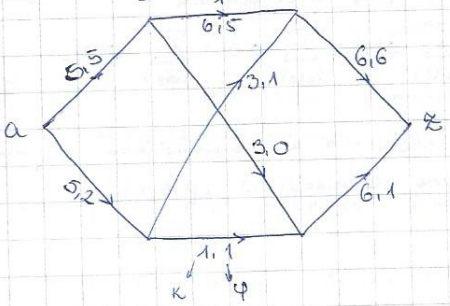

Jelölése: $\varphi_L$ Persze a konstansszorosára is igaz, ha a kapacitásba belefér, ld. a következő oldalon a példát.

Példa.

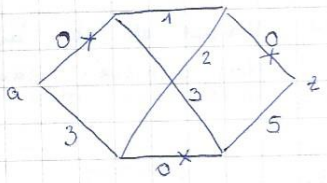



$L_1 = (a, b, d, z)$
$L_2 = (a, c, e, z)$
$L_3 = (a, c, d, z)$

$$|5\varphi_{L_1} + \varphi_{L_2} + \varphi_{L_3}| = 7$$



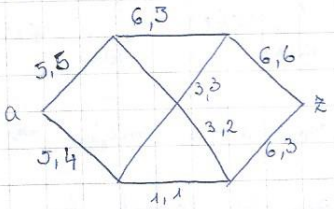

Maradvány: $K(e) - \varphi(e)$




→ ebben már nem lehet a–z-be jutni.

Vége? Nem igazán: legyen $L_4 = (a, b, e, z)$

$$|3\varphi_{L_1} + \varphi_{L_2} + 3\varphi_{L_3} + 2\varphi_{L_4}| = 9$$




→ ez is tényleg folyam.

Ennél nagyobb nem lehet:
van $5 + 3 + 1 = 9$ -es vágás.

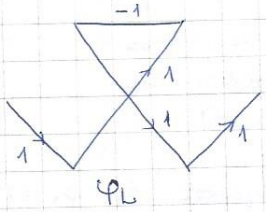
Hogy lehetne a mohót mégis megjavítani? → Lehessen visszafelé is küldeni anyagot.

Def. Lánc: nem irányított a–z út. (házi definíció)

$$\varphi_L^{(e)} = \begin{cases} 1, & \text{ha jó irányú az él} \\ -1, & \text{ha rossz irányú az él} \\ 0, & \text{ha nem él } L\text{-ben} \end{cases}$$

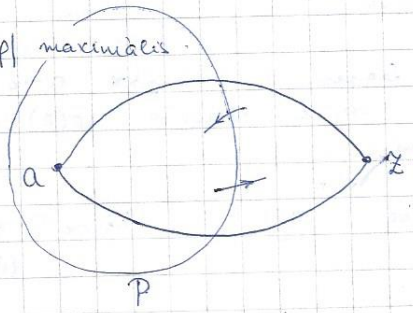
Lemma. Ha $L$ lánc, $K(e) - \varphi(e) \geq 1$, ha $e$ jó irányú él;
$\varphi(e) \geq 1$, ha $e$ rossz irányú él, továbbá $\varphi$ a–z folyam:
$\Rightarrow \varphi + \varphi_L$ a–z folyam

Alkalmazzuk $5\varphi_{L_1} + \varphi_{L_2} + \varphi_{L_3}$-ra!




$5\varphi_{L_1} + \varphi_{L_2} + \varphi_{L_3} + 2\varphi_L$ is folyam
→ kijön a 9.

Lemma. Ha nincs $\varphi$-re javító lánc, akkor $|\varphi|$ maximális.




B: Legyen $P$ azon pontok halmaza, ameddig elérő javító lánc van. (egy lánc nem feltétlenül a–z)
Nincs a–z jav. lánc $\Rightarrow z \notin P$.

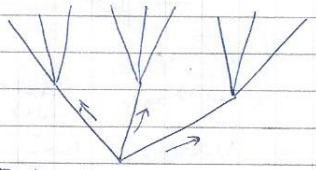
Nem folytatható egyik lánc se $P$-n kívül
$\Rightarrow$ $\forall$ $P$-ből kimenő élre $\varphi(e) = K(e)$ $\forall e \in (P, \overline{P})$. (nem növelhető)
$\forall$ $P$-be bemenő élre $\varphi(e) = 0$ $\forall e \in (\overline{P}, P)$. (nem csökkenthető)

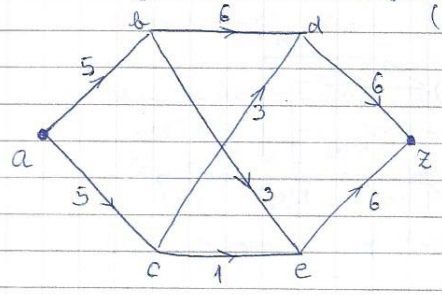
$\Rightarrow$ Tudjuk, hogy $|\varphi| = K(P, \overline{P})$.
Lemma: $|\varphi| \leq K(P, \overline{P})$ $\forall \varphi$ $\forall (P, \overline{P})$. És a folyamat tényleg megakad, ha a kapacitások egészek.

**Tétel.** (Ford – Fulkerson) Ha $K(e) \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $\max |\varphi| = \min K(P, \overline{P})$, $P$ a–z.

Ezt bizonyítottuk az imént. Ez egy minimax-tétel. $\square$

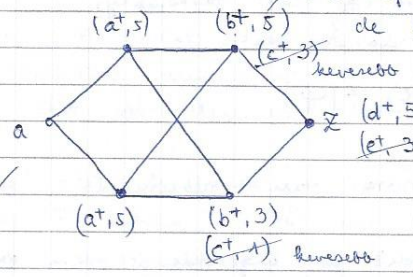
Az algoritmus szélességi keresés, mint az alternáló útnál volt.
(A # F–F általános esetében.)

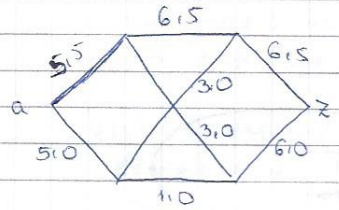




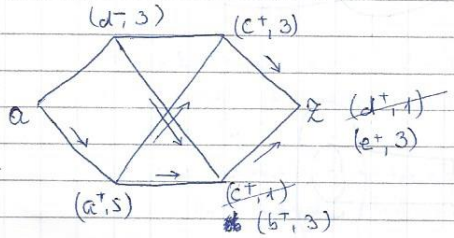

~~$5\ \varphi_{L_1} + \varphi_{L_2} + \varphi_{L_3}$~~

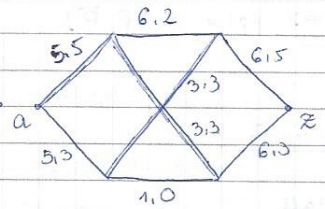
a kapacitás 6, de b-ben csak 5 lehet



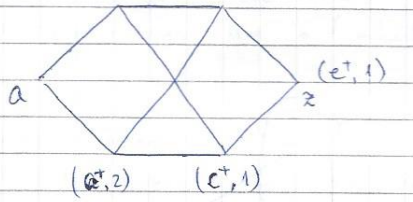



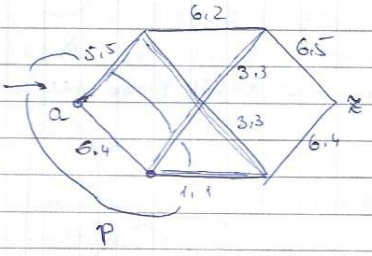

Ezzel kezdünk, ezt fogjuk javítani (5 értékű folyam)




8 értékű folyam




Duplán a max. kihasználtságú élek.

$K(P, \overline{P}) = 9$

$\rightarrow |\varphi| = 9.$

A lépésszámról: ez nem exponenciális.

- Egy nagy lépés: lánc keresés. $\forall$ élet 1x kell csak nézni.
  $|V| = n$, $|E| = m$. $\longrightarrow$ max $m$ lépés
- Hányszor kell megismételni?
  Legyen $K_a = \sum_{e \in K_i(a)} K_e$. Minden lépés legalább 1-et növel $|\varphi|$-n.

$\Rightarrow$ $O(K_a \cdot n)$ lépés

Biz. nélkül: $O\left(mn \log \frac{n^2}{m}\right)$ is elég.

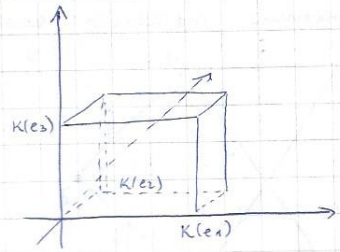
**Tétel.** (Ford – Fulkerson általánosan). $\max |\varphi| = \min K(P, \overline{P})$

B: (Kijövünk algoritmussal is, de kínos)

Volt egész kapacitásokra. $\varphi(e)$ vektorok, $m$ darab, $0 \le \varphi(e) \le K(e)$

$\to \mathbb{R}^m$-ben.

$$\sum_{e \in Be(x)} \varphi(e) = \sum_{e \in Ki(x)} \varphi(e)$$



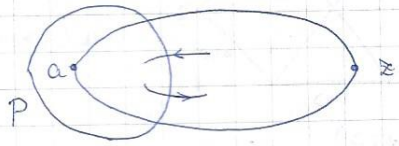

Világos, hogy ez $\mathbb{R}^m$-ben egy zárt tartomány, ebben keressük egy fv. maximumát:

$$\sum_{e \in Ki(a)} \varphi(e) - \sum_{e \in Be(a)} \varphi(e) = |\varphi|$$

Bolzano – Weierstrass $m$ változóra: van maximum.

Erre a folyamra alkalmazzuk az algoritmust nem egész élekkel

$a$-ból $z$-ig nincs növelő lánc $\to$ $P$




$\forall e \in (P, \overline{P})$: $\varphi(e) = K(e)$,

$\forall e \in (\overline{P}, P)$: $\varphi(e) = 0$

$\Rightarrow |\varphi| = K(P, \overline{P})$. □

2015.03.02.

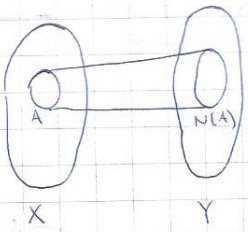
## Matematikán belüli alkalmazások

**Tétel.** Ford – Fulkerson $\to$ König – Hall

B: $|N(A)| \ge |A|$ triv

A visszafelé irányt bizonyítjuk:

Ha $\forall A \subseteq X$-re $|A| \le |N(A)|$, akkor van $X$-ből $Y$-ba teljes $P$.




Legyen $|X| = n$.

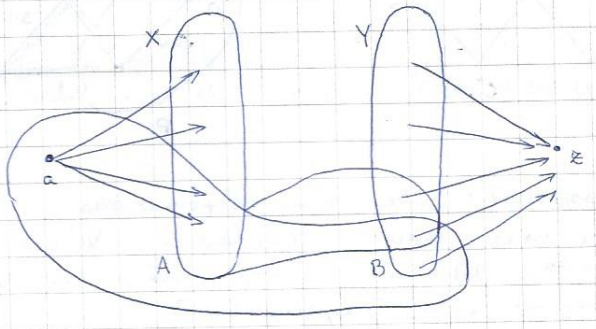
Készítsünk folyamot:

$a$-ból ir. él $X$ $\forall$ pontjába,

$X$-ből $Y$ felé irányítunk,

$Y$-ból $z$-be ir. élek

$\forall K(e) = 1$, ha van él.




Amit kell belátni, hogy

$\forall (P, \overline{P})$ $a$–$z$ vágásra $K(P, \overline{P}) \ge n$.

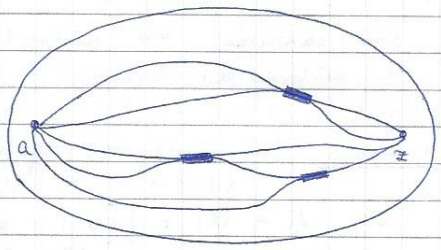
$$K(P, \overline{P}) = \#(P\text{-ből kimenő élek}) = \underbrace{|X| - |A|}_{a\text{-ból } X\text{-be}} + |N(A) \setminus B| + \underbrace{|B|}_{B\text{-ből } z\text{-be}} \ge$$

$$\ge |X| - \underbrace{|A| + |N(A)|}_{\ge 0} \underbrace{- |B| + |B|}_{0} \ge |X| = n.$$

Tehát FF miatt van egész $\varphi(e)$-kkel rendelkező $n$ értékű folyam

$\to \forall \varphi(e) = 0$ vagy $1$ $\Rightarrow \exists n$ független $X$–$Y$ él.

**Tétel.** (Menger 1. tétele) Legyen $G$ irányított gráf, $a, z \in V(G)$.
Az $a$-ból $z$-be menő élidegen utak száma =
az összes ilyen utat lefogó maximális élszám.



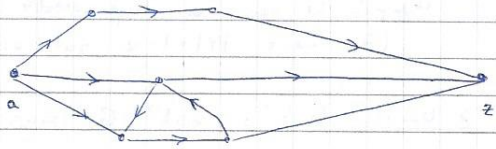

B: A maximális diszjunkt utak száma $\leq$ a minimális lefogó élszám.
$\longrightarrow$ triviális

Bizonyítandó: $\exists$ olyan, amire $\Leftarrow$ áll fenn.
$K(e) = 1 \longrightarrow$ hálózat

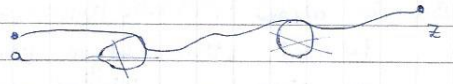
Csináljunk $a-z$ folyamot: FF szerint $\exists\ \varphi(e) \in \{0,1\}$-es folyam, amire
$|\varphi| =$ max $K(P, \overline{P})$. (Valójából nem is kell, hogy ez a maximális legyen; minimax tételből lehet szó elegendő, hogy legyen ilyen $P$.)

Vegyük a minimális lefogó élek halmazát!
Ezzel definiálható egy $P$: alulra $a$-ból ezen élek használata nélkül el lehet jutni.
$\longrightarrow K(P, \overline{P})$ = minimális lefogó élszám.

$\varphi(e) = 1$ definiál egy részgráfot, amelyben
$\forall v \neq a, z$-re $Be(v) = Ki(v)$
$Be(a) + K = Ki(a)$




Vegyünk egy $a-z$ sétát! ($\emptyset$ élismétlés)
A köröket kiiktatjuk belőle $\longrightarrow$ marad egy $a-z$ út.
Ezt az utat elhagyjuk $\longrightarrow$ ugyanez $K-1$-re.
Így $K$ utat kapunk $\longrightarrow$ megvan az $\Leftarrow$. $\square$

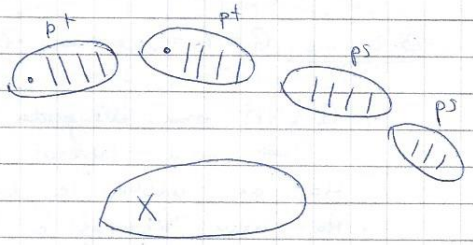



Mengernek 4 tétele van: ugyanilyen jellegű irányítatlan gráfra, ill. pontokra.
A gyakorlaton lesz a másik három, de az is vizsgaanyag lesz.

———— ∘ ————

Mikor lehet $\nu(G) = n/2$?

Tfh. igaz (azaz van teljes párosítás), és hagyjunk el egy $X \subseteq V$-t.
Ekkor $V \setminus X$ szétesik komponensekre.
Különböztessük meg a páratlanokat a párosítástól!




Def. A páratlan komponensek száma $c_p(G \setminus X)$.

Nyilván $c_p(G \setminus X) \leq |X|$.

**Tétel** (Tutte) Legyen $G = (V, E)$.

$G$-ben van t.p. $\Leftrightarrow$ $\forall X \subseteq V$: $c_p(G \setminus X) \leq |X|$.

B: Van párosítás $\Rightarrow$ teljesül — ez volt.

A megfordítást bizonyítjuk.

**1. lemma.** $|V|$ páros $\Rightarrow$ $c_p(G \setminus X) \equiv |X| \pmod 2$.

B: $\underbrace{|V|}_{ps} = |X| + \underbrace{\left|\{v \mid v \text{ páros komponensben van}\}\right|}_{ps} + \underbrace{\left|\{v : v \in \text{pt komp.}\}\right|}_{\equiv c_p(G \setminus X)}$

Indirekt bizonyítás: $c_p(G - x) \leq |X|$ teljesül, de $\nexists$ t.p.

Vegyük a pontszám szerint legrisikóbb ellenpéldát!

$|V| = 0, 1, 2$ végigpróbálható módon nem lehet.

**Def.** $Y \subset V$ gát, ha $c_p(G - Y) = |Y|$.

Vegyük $G$-ben a legnagyobb gátat $\longrightarrow$ $Y_0$.

($\exists$, mert $|Y| = 1$-re gát az 1. lemma miatt) $\Rightarrow$ $|Y_0| \geq 1$.

**2. lemma.** $G \setminus Y_0$-nak $G_0$ páros komponensében van teljes párosítás.

2

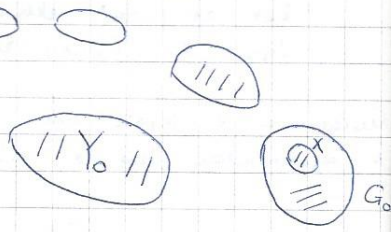
B: Triviálisan $|V(G_0)| < |V|$, így $G_0$ nem lehet ellenpélda, így ha teljesül a feltétel, akkor teljes párosítás is van.

Ha teljesül a feltétel $\longrightarrow$ kész ✓

$\nexists$ Ha nem teljesül a feltétel

$\exists X \subseteq V(G_0)$, $X \neq \emptyset$ : $c_p(G_0 - X) > |X|$,

akkor $c_p(G_0 \setminus X \setminus Y_0) > |X|$.




$$c_p(G \setminus X \setminus Y_0) = c_p(G - Y_0) + c_p(G_0 - X) - \\ = |Y_0| + \underbrace{c_p(G_0 - X)}_{>|X|} \geq |Y_0| + |X| + 1$$

$\longrightarrow$ nem teljesül a feltétel $G$-re és $(X + Y_0)$-ra $\lightning$

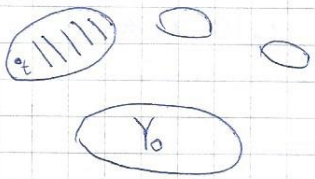
**3. lemma.** $G - Y_0$-nak egy $G_1$ pt komponensében $\forall t \in G_1$ pontra: $G_1 \setminus \{t\}$-ben van teljes pár

B: $G_1 \setminus \{t\}$ nem ellenpélda, mert kisebb a minimálisnál.

$\Rightarrow$ nem teljesül a feltétel vagy van t.p.

Ha az utóbbi: a lelőhet $\longrightarrow$ kész.

Ha nem teljesül a feltétel:




$\exists X \subseteq G_1 \setminus \{t\}$ : $c_p(G_1 - \{t\} - X) > |X|$

$\Rightarrow$ $c_p(G_1 - \{t\} - X) \geq |X| + 1$

Az 1. lemma miatt $c_p(G_1 - \{t\} - X) \neq |X| + 1$

$\Rightarrow$ $c_p(G_1 - \{t\} - X) \geq |X| + 2$.

$$\Rightarrow c_p(G - \{t\} - X - Y_0) = c_p(G - Y_0) + c_p(G_1 - \{t\} - X) - 1 \\ \geq |Y_0) + |X| + 2 - 1 = |Y_0| + |X| + 1$$

Ha $>$ $\longrightarrow$ az ereditben se teljesült a feltétel $\lightning$

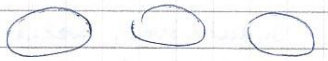
Ha $=$ $\longrightarrow$ nagyobb gátat kaptunk. $\lightning$

Legyen $H$ páros gráf $Y_0$ és páratlan komponensei között: $H(Y_0 \cup \{\text{pt komponens}\}, E_H)$

$E_H$: összekötve, ha van él $y \in Y_0$ és a pt. komponens egy pontja között.

**4. lemma.** A két oldal $H$-ban azonos méretű és van benne teljes párosítás.

B: Egyforma számúak, mert $Y_0$ gát.

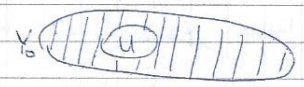


A Hall-feltétel teljesül:

$\nexists\ U \subseteq Y_0 : |N_H(U)| < |U|$

$\Rightarrow c_p(G - (Y_0 - U)) \geq$ $G$-ben $Y_0 - U$-hoz lapcsolódó komponensek száma

$\Rightarrow |Y_0| - |N_H(U)| > |Y_0| - |U| \longrightarrow c_p(G - (Y_0 - U)) > |Y_0| - |U|$ ↯



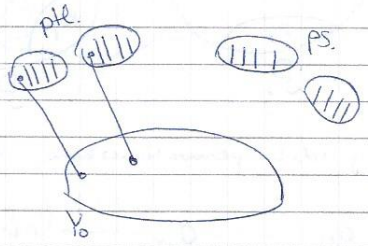

A bizonyítás befejezése:

L4 szerint páros. ptl. komponensek és $Y_0$ között

L2 szerint a párosításban megvan

L3 szerint a páratlanok többi eleme között van.

$\Rightarrow$ t.p. $G$-ben. ↯




□

**Egésszé tevő lemma.** (Baranyai, 1975) 2015. 03. 09.

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & \cdots & c_{ps} \end{bmatrix}$$

$c_{ij} \geq 0$ $A_1, \dots, A_p$ sorösszegek,
$B_1, \dots, B_s$ oszlopösszegek, $A_i, B_j \in \mathbb{Z}$.

Ekkor $\exists\ c'_{ij} = \lfloor c_{ij} \rfloor$ vagy $\lceil c_{ij} \rceil$ értékek, amik teljesítik ugyanezen feltételeket.

B: 1. Redukáljuk 0–1-re: essenek az értékek 0 és 1 közé

$c^*_{ij} = c_{ij} - \lfloor c_{ij} \rfloor = \varepsilon_{ij} \longrightarrow 0 \leq \varepsilon_{ij} < 1$

$\Rightarrow A^*_i = A_i - \sum_j \lfloor c_{ij} \rfloor$, $B^*_j = B_j - \sum_i \lfloor c_{ij} \rfloor$ új sor- és oszlopösszegek.

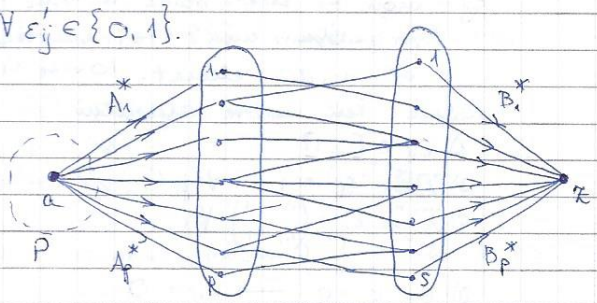
Tehát az $\varepsilon'_{ij}$-ket kell meghatározni, $\forall \varepsilon'_{ij} \in \{0, 1\}$.

Ha $\varepsilon_{ij} = 0 \longrightarrow \varepsilon'_{ij} = 0$.

2. Hálózat $K(e_{ij}) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \varepsilon_{ij} = 0 \\ 1 & \text{különben} \end{cases}$

$P := \{a\}$

A folyam legyen az $\varepsilon_{ij}$ által megadott. Anyagmegm. teljesül.




$\longrightarrow |\varphi| = \sum_{i=1}^{P} A^*_i$ A kapacitások egészek $\Rightarrow \exists$ egész (0–1) megoldás.

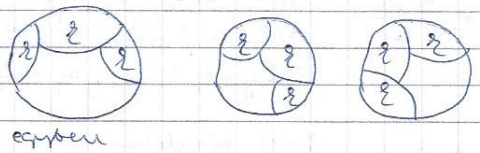
$\longrightarrow$ ezek lesznek $\varepsilon^*_{ij}$. □

Volt: ha $n$ páros, $K_n$ felbontható $n-1$ teljes párosításra.

Sylvester (1885). $3 \mid n$-re, teljes háromszínűsítés?

$\longrightarrow$ sejtés: $k \mid n$: $\exists\ n$ elemű halmaz $\binom{n}{k}$ partíciója $k$ elemű részekre, hogy $\forall$ $k$-as partícióban 1 partíción legyen

$$\frac{\binom{n}{k}}{\frac{n}{k}} = \binom{n-1}{k-1}$$



egyben $\frac{n}{k}$ $\binom{n}{k}$ lehetőség

$k = 3$: Rose Peltesohn 1936 algebrai konstrukció

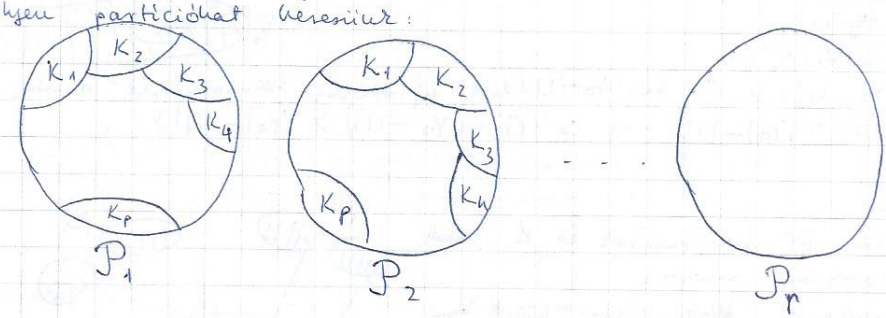
Baranyai Zsolt 1976: $\forall k$-ra igaz.

**Tétel.** (Baranyai, 1976) Igaz $\forall k$-ra a Sylvester-sejtés. (a tényleges kifejtés később)

B: Indukcióval, sokkal általánosabban.

$K_1, K_2, \dots, K_p$ nemnegatív egészek adottak.

Ilyen partícióhat keresünk:




A $j$-edik permutációban $a_{ij}$ db $K_i$-es van $(1 \le j \le r)$

$$\begin{array}{llll} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \longrightarrow K_1\text{-esek} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \longrightarrow K_2\text{-esek} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pr} \longrightarrow K_p\text{-esek} \end{array}$$

Ahol:

1) $0 \le a_{ij}$
2) $0 \le K_i \le n$ $\quad$ ($K_i = K_\ell$ $(i \ne \ell)$ lehet!)
3) $\sum_{i=1}^{p} a_{ij} K_i = n$ $\longrightarrow$ azaz tényleg partíció
4) $\sum_{j=1}^{r} a_{ij} = \binom{n}{K_i}$

**Tétel:** (ált.) Ha adottak az $n$, $K_i$, $a_{ij}$ egészek, kielégítik 1—4)-et, akkor $\exists\, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$ partíciók, (Speciálisan $p=1$, $K_1 = K \longrightarrow \frac{n}{K}, \dots, \frac{n}{K}$, $r = \binom{n-1}{K-1}$) minden $K_i$-es pontosan 1-szer szerepel; $j$-edik part-ban $K_i$ $a_{ij}$-szer szerepel.

B: $n-1 \longrightarrow n$ indukció lesz.

Mire volna szükségünk $n-1$-ben?

Az $n$-edik pontot elhagyjuk $\longrightarrow$ minek kéne teljesülnie

$\varepsilon_{ij}$ = azon $K_i$-esek száma a $j$-edik partícióban, amik tartalmazzák az $n$-edik elemet. (0 vagy 1)

$$\begin{array}{c} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_p \end{array} \begin{pmatrix} a_{1j} - \varepsilon_{1j} \\ a_{2j} - \varepsilon_{2j} \\ \vdots \\ a_{pj} - \varepsilon_{pj} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} K_1 - 1 \\ K_2 - 1 \\ \vdots \\ K_p - 1 \end{array} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1j} \\ \varepsilon_{2j} \\ \vdots \\ \varepsilon_{pj} \end{pmatrix}$$

Miknek kell ezekre teljesülni?

A) $\varepsilon_{ij} \in [0, 1]$ ✓

B) $\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_{ij} = 1 \quad \forall j$ ✓

C) $\sum_{j=1}^{r} \varepsilon_{ij} = \binom{n-1}{K_i - 1} \quad \forall i$

D) Ha $K_i = 0 \longrightarrow \varepsilon_{ij} = 0$

E) Ha $K_i = n \longrightarrow \varepsilon_{ij} = a_{ij} = 1$

F) $\varepsilon_{ij} \le a_{ij}$.

Most már tényleg bizonyítunk! $n-1 \longrightarrow n$

Megpróbáljuk kitalálni az $\varepsilon$-okat: megcsináljuk $n-1$-re, majd hozzávesszük az $n$-edik pontot.

**1. állítás.** A—F)-nek van nem feltétlenül egész megoldása.

B: $\varepsilon_{ij} = \dfrac{K_i a_{ij}}{n}$

A) ✓ 3)-ból, mert $K_i \le n$.

B) $\sum_i \varepsilon_{ij} = \sum_{i=1}^{p} \frac{K_i a_{ij}}{n} = \frac{1}{n} \sum_i K_i a_{ij} \overset{3)}{=} \frac{1}{n} \cdot n = 1$

C) $\sum_{j=1}^{r} \varepsilon_{ij} = \frac{K_i}{n} \sum_j a_{ij} = \frac{K_i}{n} \binom{n}{K_i} = \binom{n-1}{K_i - 1}$

D—F) trivialitás

2. állítás. $\exists$ egész megoldás is.

B: egésszé tevő lemma $\longrightarrow$ $\varepsilon_{ij}$ kicserélhető 0/1-re

A'): $\varepsilon_{ij} \in \{0,1\}$

$n-1$-re felépítjük a $\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ mátrixot. $\longrightarrow$ $K_1, \dots, K_p, K_1-1, \dots, K_p-1$ - esekből áll, ha 1–4) teljesül erre a mátrixra.

(Használható: 1–4) eredetire + 1–7))

1) F)-ből

2) ha $K_i = 0$ $\longrightarrow$ elhagyjuk $\longrightarrow$ nem tud $-1$ lenni; D) és E) miatt

3) $$\sum_{i=1}^{p}\left[(a_{ij}-\varepsilon_{ij})K_i + \varepsilon_{ij}(K_i-1)\right] = \sum_{i=1}^{p} a_{ij}K_i - \sum_{i=1}^{p}\varepsilon_{ij} = \cancel{\sum} n - 1$$

eredetiben B)

4) $$\sum_{j=1}^{r}(a_{ij}-\varepsilon_{ij}) = \binom{n}{K_i} - \binom{n-1}{K_i-1} = \binom{n-1}{K_i}$$

4) C)

Most tudjuk: $n-1$-re meg tudtuk konstruálni $\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$-ből.

Most kérdés: hogy vesszük hozzá az $n$-edik pontot?

2015. III. 16.

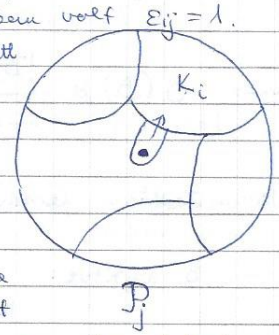
Konstrukció $n$-re: $\forall$ partícióhoz hozzávesszük az $n$-edik elemet, ezt hozzávesszük a $K_i-1$-eshez, ha $\varepsilon_{ij}=1$.

Be kell látni, hogy így is kívánt típusú rendszert kapunk.

- $K_i$-sekből áll, mert a $K_i-1$-esek eltüntek, hiszen azokban volt $\varepsilon_{ij}=1$.
- Adott partícióban pontosan 1-hez kell hozzávenni B) miatt
- $\forall$ $K_i$ elemű pontosan 1-szer

  Ha $n \notin$: $\longrightarrow$ már így volt eddig is.

  Ha $n \in$ $\longrightarrow$ $\forall$ $n$ nélküli $K_i-1$-es pontosan egyszer volt.

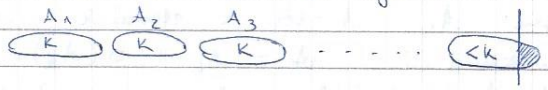



$\square$

Baranyai is a Lovász–Pelikán–Pósa ... osztályba járt. Versenyeredménye nem volt, de versenyszerűen fuvolyázott. 30 éves korában meghalt autóbalesetben. K. Gy. is fuvolyázott, egyszer kapott Baranyaitól hottát rengeteg dobozban.

Ha $k \nmid n$ $\longrightarrow$ sejtések vannak csak. A fenti nem működik rájuk.

Sejtés arra az esetre, ha $k \nmid n$:



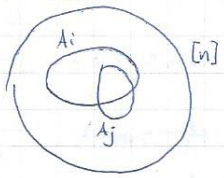

$\rightarrow$ $\binom{[n]}{k}$ elemei felsorolhatók úgy, hogy az egymás utáni $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 1$ db $k$-as diszjunkt páronként.

$$\underbrace{A_1, A_2, \dots, A_{\frac{n}{k}}}, \underbrace{A_{\frac{n}{k}+1}, A_{\frac{2n}{k}}}_{\text{diszjunktak}}, \underbrace{\dots}, \dots \longrightarrow \underbrace{A_1, \dots, A_m}_{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 1 \text{ db diszjunkt}}, \underbrace{\dots}, \underbrace{\dots}$$

$k = 2$-re ismert

Sperner (1928) kérdése:

$N = p_1 p_2 \cdots p_n$ négyzetmentes számok maximum hány osztóját lehet kiválasztani, hogy $d_i \nmid d_j$ $(i \neq j)$? $(d_1, \dots, d_m)$

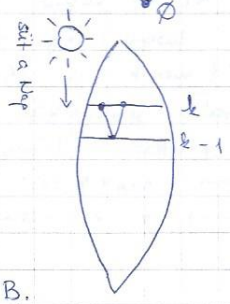



Helyette: $A_1, \dots, A_m \subseteq [n]$
$A_i \not\subset A_j$, ha $i \neq j$
$\max m = ?$

Tétel (Sperner, 1928): ~~[n] tartalmazás~~
Legyen $\mathcal{A} \subset 2^{[n]}$ és $A_i, A_j \in \mathcal{A} \Rightarrow A_i \not\subset A_j$, akkor $|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

B: (Sperner) Egyenlőség éles: az $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ elemű részhalmazok. ✓

A rajzon a részhalmazok pontok.
Legyen $k = \max \{ |A| : A \in \mathcal{A} \}$.
Legyen $\mathcal{B} = \{ B_1, \dots, B_\ell \} \subseteq \binom{[n]}{k}$
$\sigma(\mathcal{B}) = \{ C : C \subset B \in \mathcal{B}, |C| = k-1 \}$ árnyék

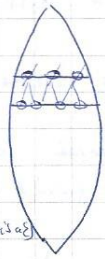



Lemma: $\sigma(\mathcal{B}) \geq \dfrac{|\mathcal{B}| \cdot k}{n-k+1}$

B: Kettős leszámlálás $(C, B)$, ahol ~~$C \in \sigma(\mathcal{B})$~~ $B \in \mathcal{B}$, $C \subset B$.

B rögzítve: $|\mathcal{B}| \cdot k$
C rögzítve: $|\sigma(\mathcal{B})|$
Egy $k-1$-es úgy jöhet létre, hogy egy külső elemet hagyunk el: $n-k+1$ féleképp
maximum $\rightarrow |\sigma| (n-k+1) \geq |\mathcal{B}| \cdot k$.

Legyen $\mathcal{A}_k$: $\mathcal{A}$-ból $k$ eleműek (a korábbi $\mathcal{B}$)
Transzformáció: $\mathcal{A} - \mathcal{A}_k + \sigma(\mathcal{A}_k)$
A $k$-sokat kihagyjuk, az árnyékokat hozzávesszük.



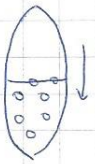
Állítás: ez is tartalmazásmentes.
A $k-1$-esek nem lehetnek részei semminek (ők a maximálisak).
Lehet-e, hogy tartalmaznak? Nem, mert a $k$-sok,
amik követték volnának, mindben nem tartalmaztak. (ξ)

Állítás: $|\mathcal{A} - \mathcal{A}_k + \sigma(\mathcal{A}_k)| \geq |\mathcal{A}|$ valamely $k$-ra (meghatározandó még!)

$$|\mathcal{A}| - |\mathcal{A}_k| + |\sigma(\mathcal{A}_k)| \geq |\mathcal{A}|$$
$$|\sigma(\mathcal{A}_k)| \geq |\mathcal{A}_k|.$$

A lemma szerint ez igaz, ha $\dfrac{k}{n-k+1} \geq 1$

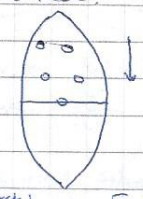
$\rightarrow k \geq n-k+1 \rightarrow$ $\boxed{k \geq \frac{n+1}{2}}$ (legjobb tolás közép felé)



Ha $n$ páros $\rightarrow$ levehetünk $n/2$-ig, ha $n$ pt $\rightarrow \frac{n-1}{2}$-ig.

Feltehető, hogy $n/2$ felett nincs semmi.

Legyen $\bar{\mathcal{A}} = \{\bar{A},\ A \in \mathcal{A}\}$. $\longrightarrow$ $\mathcal{A}$ tartalmazási feltétel érvényben marad!
$\rightarrow$ Nincs $n/2$ alatti méret.
Megint le lehet tolni középre. $\rightarrow$ kész. ✓

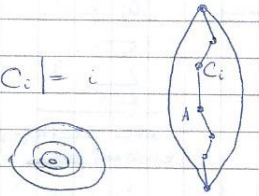


□

Ebből a páros egyértelműsége kijött. Pt-ra az jött ki, hogy $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ és $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ méretűek lehetnek, de a minimum milyenségéről nem tudunk sokat: csak annyit, hogy ilyen méretek valamely elegyítése.

Második bizonyítás (Lubell, 1966):

Legyen $\mathcal{C} = \{C_0, \dots, C_n\}$ (teljes) lánc: $C_0 \subset C_1 \subset \dots \subset C_n$, $|C_i| = i$




Teljes láncok száma: $n!$

Lánc átmegy A-n: $A \in \mathcal{C}$
Ha $\mathcal{A}$ Sperner-tulajdonságú és $A_1 \neq A_2 \in \mathcal{A}$, akkor nem mehet közös lánc mindkettőn. (triv)

A-n átmenő teljes láncok száma: $|A|! \cdot (n-|A|)!$

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} |A|!\,(n-|A|)! \leq n!$$ , mert $\forall$ láncot legfeljebb 1-szer számolunk.

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1. \longrightarrow 1 \geq \sum_{A \in \mathcal{A}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \geq \frac{|\mathcal{A}|}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \longrightarrow \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq |\mathcal{A}|$$

$\rightarrow$ növeltük a nevezőt mind az $|\mathcal{A}|$ tagban. □

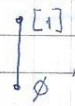
$$\sum_{A \in \mathcal{A}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1$$

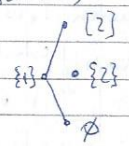
Yamamoto
Bollobás
Lubell
Meshalkin
} Ybl M

Szimmetrikus lánc: $C_k \subset \dots \subset C_{n-k}$, $|C_i| = i$.

Tétel. (De Bruijn — Kruijswijk — Tengbergen): $2^{[n]}$ felbontható szimmetrikus láncok diszjunkt uniójára.

(Eredetileg DB-K-T általánosabbat bizonyítottak.)

B: Indukció. $n = 1$: 

, $n = 2$: 

. $n \to n+1$.

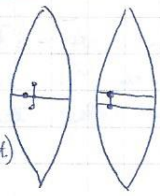
n-re felbontásban vagyunk a $C_k \subset \dots \subset C_{n-k}$ láncot. Ebből kétféleképpen új lánc:
1) $C_k \subset \dots \subset C_{n-k} \subset C_{n-k} \cup \{n+1\}$ $\longrightarrow$ hosszabb 1-gyel.
2) $C_k \cup \{n+1\} \subset \dots \subset C_{n-k-1} \cup \{n+1\}$ $\longrightarrow$ rövidebb 1-gyel

i) Ezek szimmetrikusak: $k + (n-k+1) = n+1$, $(k+1)+(n-k-1+1) = n+1$ ✓
ii) Ezek diszjunktak: nyilván nem lehet átfedés, mert n-re se volt. ✓
iii) Minden előjön. ✓

„Ez akkor lehet egyenlő, ha ugyanaz volt a ... ez." □

Látszólagos ellentmondás: $2\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \neq \binom{n+1}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ De ha n páros, és középen vagyunk, 2) üres $\rightarrow$ nem keletkezik új.

**Állítás.** A felbontásban a sz. láncok száma $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.



B: A szimmetria miatt $\forall$ lánc átmegy egy hatéptő elemen.
És egyen csak egy mehet át. (Bijekció a hatéptő elemek és a láncok között)

Harmadik bizonyítás a Sperner-tételte:
Mindegyik szimmetrikus láncból legfeljebb 1 elem választható ki.
$\longrightarrow \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

**Lemma.** $a_i \geq 1$, $a_i \in \mathbb{R}$, $A \subset [n]$ indexhalmaz.

$$\underbrace{\sum_{i \in A} a_i}_{\text{összes lehetséges részösszeg}} \in \underbrace{I}_{\text{1 hosszú félig zárt intervallum.}}$$

$\Longrightarrow$ Állítás: ez csak legfeljebb $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ A-ra teljesül.

B: $$\sum_{i \in A} a_i - \sum_{i \in B} a_i = \sum_{i \in A \setminus B} a_i \geq 1 \Rightarrow \text{nem lehet } \sum_A \text{ és } \sum_B \text{ is } I\text{-ben.}$$

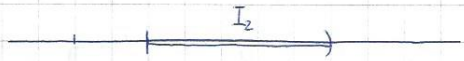
$A \supsetneq B$

Azon indexhalmazok, amelyekre $\sum a_i \in I$, Sperner-rendszert alkotnak.
Sp.-tétel $\longrightarrow \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

2015. III. 23.

**Tétel.** $a_1, a_2, \dots, a_m$ valós számok, $|a_i| \geq 1$.
$I_2$ egy 2 hosszú félig zárt intervallum
$\Rightarrow$ $P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = \frac{1}{2}$ ($\xi_i$ valószínűségi változó)

$$\Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i a_i \in I_2\right) \leq \frac{\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}}{2^m}$$



B. A lemmát fogjuk alkalmazni.

$$\varepsilon_i(A) = \begin{cases} 1 & \text{ha } i \in A \\ 0 & \text{ha } i \notin A \end{cases} \longrightarrow \sum_{i \in A} a_i = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i(A)\, a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} 2\left(\varepsilon_i(A) - \tfrac{1}{2}\right) a_i = 2 \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i(A)\, a_i}_{\substack{\text{a lemma miatt} \\ \text{egy 1 hosszú } I_1 \text{ iv.-ban} \\ \text{legfeljebb } \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor} \text{ eshet bele}}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\substack{\text{konstans, nem változtat} \\ \text{semmin, csak } \forall t \text{ eltol}}}$$

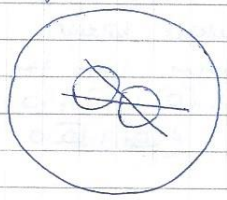
A $\left(2 \sum \varepsilon_i(A) a_i - \sum a_i\right)$ közül legfeljebb $\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}$ esik $I_2$-be.

A $\sum \pm a_i$ összegeknél az előjel mindegy: $a_i$ jelváltása a $\pm$ összeghalmazt nem változtatja (az összes ilyen összeget vesszük ugyanis, az előjelváltás a halmazra nézve invariáns).

$\rightarrow$ Feltehető: $\forall a_i \geq 1$. $\longrightarrow$ ekkor már megy a lemma.
az $I_2$-be eső $\pm a_i$ összegek száma max. $\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}$

Valószínűség $\longrightarrow$ osztunk az összes lehetséges esettel: $2^m$.

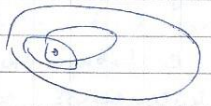
A Sperner-féle kérdést fejlesszük tovább: tiltsuk meg a diszjunktságot is!



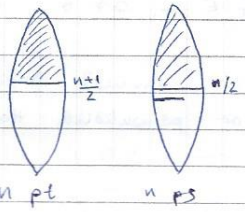
**Def.** $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ metrő, ha $F, G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cap G \neq \emptyset$.

**Tétel.** $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ metrő $\Rightarrow |\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$

B: Konstrukció: válasszunk ki egy elemet! Az erre illeszkedő részhalmazok száma $2^{n-1}$.



Másik konstrukció:

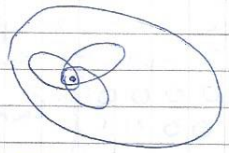



Felső becslés: $F \cap \overline{F} \neq \emptyset \longrightarrow 2^{n-1}$ db pár, mindegyik párnak csak az egyik elemét választhatjuk. □

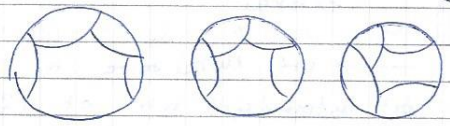
Bonyolultabb: $k$ elemű halmazokkal.

**Tétel.** (Erdős – Ko – Rado, 1961): Ha $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ metrő, akkor $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$, ha $k \leq \frac{n}{2}$
(Ha $k > \frac{n}{2}$: az összes $k$ eleműt kiválaszthatjuk.)

B: Konstrukció: vesszük az egy adott elemet tartalmazó $k$ elemű részhalmazokat: $\binom{n-1}{k-1}$



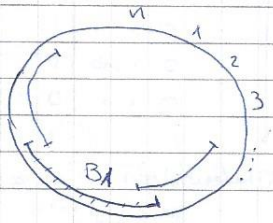
Nézzük a Baranyai-tételt!
$k \mid n$



Számuk $\dfrac{\binom{n}{k}}{\frac{n}{k}} = \binom{n-1}{k-1}$

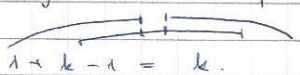
Minden partícióból $\mathcal{F}$-be legfeljebb 1 részt vehetünk, mert egy partíción belül diszjunktak.
$\longrightarrow$ Ez a $k \mid n$ esetet megoldja, de erőset használunk hozzá és vincs rendes általánosítás $k \nmid n$-re.

Nem az eredeti bizonyítás, az egy egész elmélet lenne.




**Lemma.** Tegyük körbe az elemeket!
$B_1, \dots, B_m$ $k$ hosszú intervallumok metrő rendszere
Ekkor $m \leq k$.

B. Vegyünk egy iv.-t! Minden más iv. egyik vége ebben van. $\longrightarrow 2k-1$ iv. összesen
De ezek nem mind jók: $k-1$ pár, amik szomszédos végpontúak
$\longrightarrow$ diszjunktak:



$\forall$ párból 1-et $\longrightarrow 1 + k - 1 = k$. □

Kettős leszámlálás: $(\mathcal{C}, F)$ $\mathcal{C}$ $[n]$ egy ciklikus permutációja
$F \in \mathcal{F}$ és intervallum $\mathcal{C}$ szerint.

Adott $F$-re: $|\mathcal{F}|\,|F|! \cdot (n - |F|)! = k!\,(n-k)! \cdot |\mathcal{F}|$
Adott $\mathcal{C}$-re: $\leq (n-1)! \cdot k$
↳ lemma miatt

$(n-1)! \cdot k \geq k!\,(n-k)!\,|\mathcal{F}| \longrightarrow \binom{n-1}{k-1} \geq |\mathcal{F}|$. □

1938-ban bizonyították, de hosszan nem publikáltál. Ez Erdős egyik legtöbbet hivatkozott cikke.

Üzeneteket küldünk, lehetnek hibák.
Megadjuk, hogy egy bz. hosszúságú 0/1-sorozatban hány hiba lehet.

$\boxed{0}\ 1\ \boxed{0}\ 1\ 0 \longrightarrow 1\ 1\ 1\ 1\ 0$

$1\ \boxed{0}\ 1\ \boxed{0}\ 0 \longrightarrow 1\ 1\ 1\ 1\ 0$

Def. Hamming-távolság: $a, b \in \{0,1\}^n$, $d(a,b)$ az eltérő bitek száma.

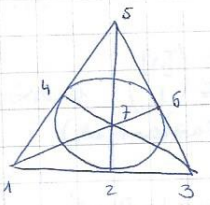
Def. $C \subset \{0,1\}^n$ e-hibajavító kód, ha $a, b \in C$, $a \neq b$, mindkettőben e változtatás végezve is különbözők maradnak.

Állítás: $C$ e-hibajavító kód $\Leftrightarrow$ benne a páronkénti Hamming-távolságok $\geq 2e+1$.
B: trivi.

Ismétlések: 0 helyett 000
1 helyett 111 $e = 1$, a távolság $\geq 3$.

„Átviteli sebesség": mennyi információt viszünk 1 bittel?
A fenti példában 1/3.

Csináljunk ennél jobbat!




Fano-geometria

$$\left.\begin{matrix} 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ \vdots \end{matrix}\right\}$$ egyenesek karakterisztikus vektorai

páronkénti távolság $\geq 4$

$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \longrightarrow$ ezt hozzáváve a távolságok $\geq 5$.

$\longrightarrow$ 1-hibajavító, 3 bit információt visz át (3 bit, mert 8 különböző), 7 helyen $\longrightarrow$ 3/7 a sebesség

Ez jobb, mint a triviális.

Def. 1-hibajelző kód: jelzi, hogy hiba volt, de javítani nem tudja.

Régi ötlet: ← összeg mod 2

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

↑ Párosságellenőrző bit

„Pelikán tanár úr? [legyint] Az mindent megtani

Általánosítás: párosságellenőrző mátrix
$M \in \mathbb{F}_2^{m \times n}$

$$C := \{ c : M \cdot c^T = 0 \}$$

A kódszavak sorok.

$$\begin{pmatrix} & & \\ & M & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pl. a személyi számban is van 1-hibajelző kód.

Lemma. $C$ 1-hibajavító $\Leftrightarrow$ nincs 1 vagy 2 db 1-est tartalmazó kódszó benne.

B. $\Rightarrow$ $0 \in C$ és zárt a mod 2 összeadásra.
Ha lenne 1 vagy 2 db 1-est tartalmazó: a 0-tól való távolság 3-nál kisebb

$\Leftarrow$ Ha van 3-nál kisebb távolságú pár $\longrightarrow$ összegük is kódszó és bennek csak 1 vagy 2 db 1-es van.

**Lemma** $C$ 1-hibajavító $\Leftrightarrow$ $M$ oszlopai különbözők és nincs köztük a $0$. (oszlop).

B: $\Rightarrow$: Tfh. 1) van $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ oszlop, az $i$-edik.

De $\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \leftarrow i\text{-edik} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ van 1 db 1-est tartalmazó kódszó $\lightning$.

2) van 2 egyforma oszlop, az $i$-edik és a $j$-edik

$M \cdot \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1 \leftarrow i\\ \vdots\\ 1 \leftarrow j\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ van 2db 1-est tartalmazó kódszó $\lightning$

$\Leftarrow$ Ugyanez, az előző lemma is azzal volt.

Indirekt. $\lightning$ $(00\cdots1\cdots0) \in C$ $\rightarrow$ $M$-ben van $0$ oszlop $\lightning$

$\lightning$ $(1\ 1\ ) \in C$ $\rightarrow$ van 2 azonos oszlop $\lightning$ $\square$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 1 & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\forall$ oszlop a $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ kivételével $2^m - 1$ oszlop, nincs 2 egyforma és nincs $0$ oszlop.
$m$ sor

$\Rightarrow$ $C = \{ c : Mc^T = 0 \}$ 1-hibajavító kód, de mekkora a mérete?

$r(M) = m$ : több nem lehet, $m$ féle oszlop megvan (pl. az első $m$).
$\rightarrow$ a sorok által feszített lineáris tér $m$ dimenziós
A kódszavak ezen tér minden elemére merőlegesek. $\rightarrow$ tehát $C$ merőleges kiegészítő altere a sorok által feszített lineáris térnek.

$\Rightarrow$ $\dim C = \underbrace{2^m - 1}_{\text{egész tér dimenziója}} - r(M) = 2^m - 1 - m$ $\Rightarrow$ $|C| = 2^{2^m - 1 - m}$

**Tétel.** A Hamming-kód $n = 2^m - 1$ hosszú hibajavító kód és $|C| = 2^{2^m - m - 1}$. $(m \geq 2)$

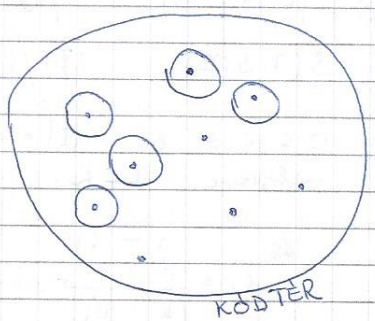
B: fent. $\square$

$m = 3$ $\quad n = 7$ $\quad$ átv. seb. $= \frac{4}{7}$ (jobb a Fanbúl)

$m = 2$ $\quad n = 3$

„Hát ez hülyeség, de jóvan jó." 2015. III. 30.

Hamming-távolság $\geq 3$
$\rightarrow$ 1 sugarú gömbök diszjunktak




**Tétel.** (Gömbi korlát) Ha $C$ $e$-hibajavító kód $n$ hosszú 0–1 sorozatokból, akkor $|C| \leq 2^n \Big/ \sum_{i=0}^{e} \binom{n}{i}$

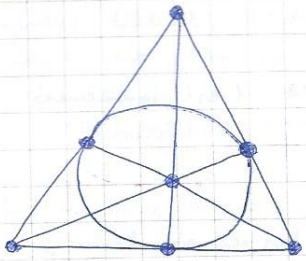
B: A kódszavak köré $e$ sugarú gömböket
$\rightarrow$ diszjunktak lesznek.
Egy gömb mérete: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{e}$
$\hookrightarrow$ 1 távolságra lévők. $\square$

**Def.** Perfekt kód: a gömbi korlátban egyenlőség áll. (a gömbök kitöltik az egész teret.)

**Állítás.** A Hamming-kód perfekt.

B: $|C| = 2^{2^m - m - 1} = \dfrac{2^n}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1}} = \dfrac{2^{2^m - 1}}{1 + 2^m - 1} = 2^{2^m - m - 1}$ $\square$

Ennek ellenére a Hamming-kód nem fejezi be a témát.



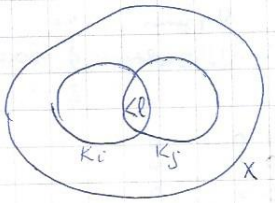
3-asok: $\forall$ 2 pontosan 1-ben van benne.

$\downarrow$

Általánosítás: pakolás.

Definíció. Adottak $2 \le l \le k < n$.
$K_i \subset X \subset [n]$., $\forall |K_i| = k$, $|K_i \cap K_j| < l$ $(i \neq j)$.

Azaz minden $l$-es legfeljebb egy $k$-asban van benn. Ez csak az egyik fele a fentinek azért, mert nem tudjuk, hogy lehet-e.




Feladat: keressük a legnagyobb $m$-et!

Állítás. $m \le \binom{n}{l} / \binom{k}{l}$

B: Kettős leszámlálás: $(K_i, L)$ párok, ahol $|L| = l$, $L \subset K_i$.

$K_i$ rögz: $m \cdot \binom{k}{l}$
$L$ rögz: $\le \binom{n}{l} \cdot 1$ $\Big\}$ $m \le \binom{n}{l} / \binom{k}{l}$
$\hookrightarrow$ feltétel miatt

Mj. Ez úgy is felfogható, hogy $n$ hosszú 0-1 sozatok, mindegyikben $k$ db 1-es van $\longrightarrow$ karakterisztikus vektorok. (fix súlyú kódszavak)
Távolságuk legalább $2k - l + 1$.

$m(n,k,l)$: a legnagyobb ilyen $m$

Tétel. $\lim\limits_{n\to\infty} m(n,k,l) \cdot \dfrac{\binom{n}{l}}{\binom{k}{l}} = 1$.

Rödl tétele, NB.

Definíció. Steiner-rendszer $\mathcal{S}(n,k,l) \subseteq \binom{[n]}{k}$. $2 \le l < k < n$
$\forall L \subset [n]$, $|L| = l$ $\exists!$ $K \in \mathcal{S}(n,k,l)$: $L \subset K$.

Állítás. $|\mathcal{S}(n,k,l)| = \binom{n}{l} / \binom{k}{l}$, ha egyáltalán $\exists$.

Fano: $\mathcal{S}(7,3,2)$ $\binom{7}{2} / \binom{3}{2} = 21/3 = 7$.

Definíció. $0 \le i \le l$, $|I| = i$. Legyen $k_i$ azon $K$ $k$-asok száma $\mathcal{S}(n,k,l)$-ben, melyekre $I \subset K$.
(Itt implicite már használjuk, hogy $I$-től ftlen.)

Állítás.
$$k_i = \frac{\binom{n-i}{l-i}}{\binom{k-i}{l-i}}$$

B: „Ez kettős leszámlálásért kiált." $(K,L)$: $K \in \mathcal{S}(n,k,l)$, $K \supset L \supset I$

$L$ rögz: $\binom{n-i}{l-i}$
$K$ rögz: $k_i \cdot \binom{k-i}{l-i}$
$\hookrightarrow$ $K$-ból még $l-i$ elem $L$-be

$\Rightarrow$ $\forall i$: ha $\exists\, \mathcal{S}(n,k,l)$, akkor $\binom{n-i}{l-i} = d \cdot \binom{k-i}{l-i}$ osztható ság.

Speciális eset: $i=1$. $\longrightarrow$ $k_1$ = fok a halmazrendszerben $= r$

$$r = \frac{\binom{n-1}{l-1}}{\binom{k-1}{l-1}} \in \mathbb{Z}.$$ Legyen $l=2$. $\rightarrow r = \frac{n-1}{k-1} \in \mathbb{Z}$ „Mindjárt megérkezünk vmi értelmeshez"

$$|S(n,k,2)| = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{k}{2}} \in \mathbb{Z},$$ mert elemszám.

Tétel. (Richard Wilson) Ha $k-1 \mid n-1$ és $\binom{k}{2} \mid \binom{n}{2}$ és $n > n(k)$ küszöbindex $\Rightarrow \exists S(n,k,2)$.
NB

Legyen most $k=3$. $\longrightarrow r = \frac{n-1}{2} \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{2} \Big/ \binom{k}{2} = \frac{n(n-1)}{3} \in \mathbb{Z}$. $\longrightarrow$ $n$ páratlan, $n = 6a + \begin{smallmatrix}1\\3\\5\end{smallmatrix}$

$\longrightarrow n = 6a + 2 \pm 1$.

Tétel. $S(n,3,2)$ (az „eredeti" Steiner-rendszer) létezik, ha $n = 6a+1$ vagy $n = 6a+3$.

B: Konstrukció $n = 6a+3$-ra $(a \geq 0)$

Számoljunk modulo $2a+1$

$\frac{u}{2} :=$ az a $v$ egész, amire $2v \equiv u \ (2a+1)$ (Ha $u$ páros: $\frac{u}{2} = v$, ha $u$ ptl: $\frac{u+2a+1}{2} = v$.)

Az alaphalmaz elemei ~~$x_0, x_1, \ldots$~~ $(x,0), (x,1), (x,2)$ párok, ahol $x = 0, 1, \ldots, 2a$.

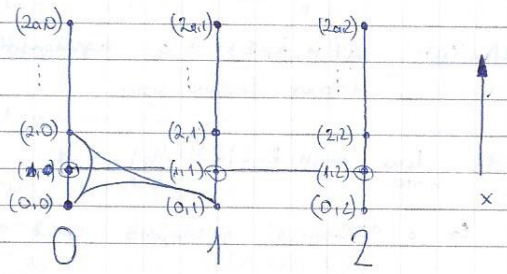
Hármasok:

1) $\forall x$: $\{(x,0), (x,1), (x,2)\}$

$2_0$) $\forall x \neq y$: $\{(x,0), (y,0), \{\frac{x+y}{2}, 1\}$

$2_1$) $\forall x \neq y$ $\{(x,1), (y,1), (\frac{x+y}{2}, 2)\}$ ciklikus

$2_2$) $\forall x \neq y$ $\{(x,2), (y,2), (\frac{x+y}{2}, 0)\}$




1. állítás. $\forall$ kettes fedve van.

B: vízszintes kettesek 1)-ben ✓

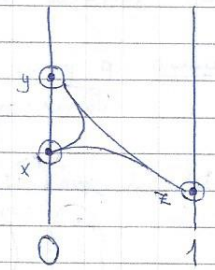
függőleges kettesek $2_i$)-ben ✓

ferde kettesek 0 és 1 oszlop között (elég a cikl. miatt)

$x \neq z$ $\exists ? y$: $\frac{x+y}{2} = z$

$2z \equiv x + y$

$y \equiv 2z - x$ $\longrightarrow \exists$ ✓ $y \neq x$, mert $2z - x \neq x$, mert $x \neq z$ $\boxed{1}$




2. állítás. $\forall$ kettes max. 1-szer fedett.

B: Lehetne a konstrukciót nyálazni, de egyszerűbb leszámlálással.

3-asok száma: $\underbrace{(2a+1)}_{1} + \underbrace{\binom{2a+1}{2} \cdot 3}_{2_1, 2_2, 2_3} = 6a^2 + 5a + 1$

Általuk fedett 2-esek maximális száma: $3(6a^2+5a+1) = 18a^2 + 15a + 3 =$
$= (6a+3)(3a+1) = \binom{6a+3}{2}$

$\binom{6a+3}{2}$ 2-es lefedve a diszjunkt esetben.

És 1. áll. miatt $\forall$ le van fedve. $\Rightarrow$ nem lehet metszet. $\boxed{2}$

Ezzel az $n = 6a+3$-as eset megvan.

Legyen most $n = 6a + 1$, számoljuk mod $2a$.

Hármasok: 1) $\{(x,0),(x,1),(x,2)\}$ $x = 0, \dots, a-1$

$\longrightarrow$ számuk $a$.

$$\left.\begin{array}{l} 2_0)\ \{(0,0),(a,1),\infty\} \\ \{(1,0),(a+1,1),\infty\} \\ \vdots \\ \{a-1,0),(2a-1,1),\infty\} \end{array}\right\} \{(x,0),(x+a,1),\infty\} \quad x = 0, \dots, a-1$$

$2_1)$ $\{(x,1),(x+a,2),\infty\}$ $x = 0, \dots, a-1$

$2_2)$ $\{(x,2),(x+a,0),\infty\}$ $x = 0, \dots, a-1$

$5_0)$ $\{(x,0),(x+i,1),(x-i,1)\}$ $x = 0, \dots, a-1$, $i = 1, \dots, a-1$

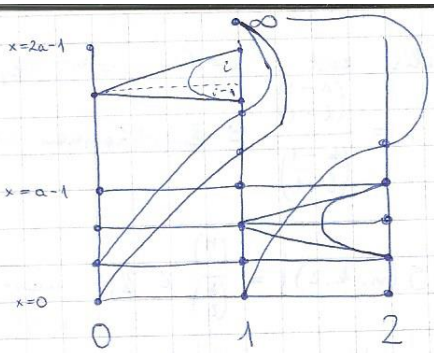
$5_1)$ $\{(x,1),(x+i,2),(x-i,2)\}$

$5_2)$ $\{(x,2),(x+i,0),(x-i,0)\}$

$8_0)$ $\{(a+x,0),(a+x+i,1),(a+x-i+1,1)\}$ $x = 0, \dots, a-1$; $i = 1, \dots, a-1$

$8_1)$ $\{(a+x,1),(a+x+i,2),(a+x-i+1,2)\}$

$8_2)$ $\{(a+x,2),(a+x+i,0),(a+x-i+1,0)\}$




1. állítás: ∀ kettes le van fedve.

2. állítás: ∀ kettes max. egyszer van fedve.

} bizonyítás alapgondolata hasonló, de macerásabb, nem kell tudni vizsgára

2015.04.12.

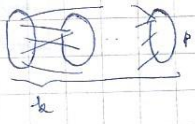
Definíció: $m(n,k,2)$ a legnagyobb $n,k,2$ párolás, $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ és ∀ kettes legalább 1-ször fedve van.

Tétel: $\lim_{n\to\infty} m(n,k,2) \cdot \binom{k}{2} \Big/ \binom{n}{2} = 1$.

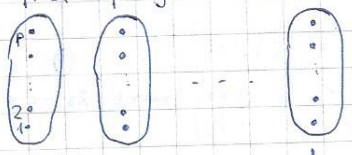
Ez a Wilsonnál egyszerűbb: csak annyit mond, hogy elég nagy $n$-re van kb. jó.

B: Nem teljesen részletesen.

Lemma: $p$ prím, $p > k$ $\Rightarrow$ ∃ olyan párolás, amiben pontosan a $T(p \cdot k, k)$ Turán-gráf élei vannak fedve. ($k$ osztály, mindben $p$ pont)




B: A gráf partjait számozzuk így:




$(i,j)$: az $i$. halmaz $j$. eleme

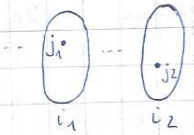
mod $p$ számolunk

$1 \le c, d \le p$

$F_{(c,d)} := \{(i, ci+d) : 1 \le i \le k\}$ konstrukció

Minden él pont egyszer van fedve.

él: $(i_1, ci_1+d)$ — $(i_2, ci_2+d)$

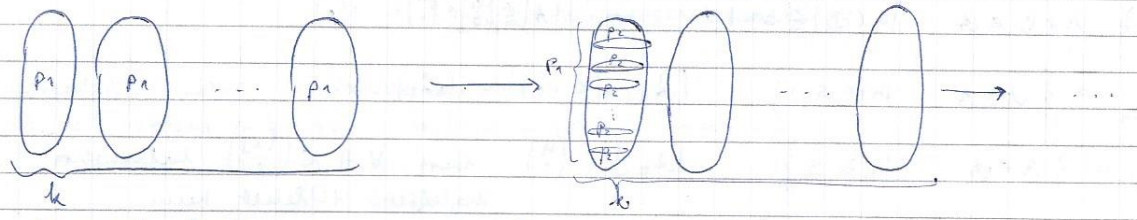



$\left.\begin{array}{l} ci_1 + d = j_1 \\ ci_2 + d = j_2 \end{array}\right\}$ egyért. $\mathbb{F}_p$-ben $c, d$-re, $\begin{vmatrix} i_1 & 1 \\ i_2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \longrightarrow$ egyértelmű a megoldás

A bizonyítás vázlata: Legyen $p_1$ a legnagyobb prím, amire $p_1 \cdot k \le n$

A lemma miatt $T(p_1 \cdot k, k)$ Turán-gráf éleit fedjük.

Legyen $p_2$ a legnagyobb prím: $p_2 \cdot k \le p_1$.




A következő lépésben $p_3$-at versenyek a $p_2$-ben s.í.t.
A kimaradók kevesen lesznek, de ezt most nem számolgyuk ki részletesen.
Felhasználjuk: $N$ és $(1+\varepsilon)N$ között van prím ~□

---

Most visszatérünk a halmazrendszerekhez: mi a helyzet, ha $|A_1 \cap A_2| = 1$ ?

**Tétel.** (Erdős – De Bruijn) $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$; $(A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow |A_1 \cap A_2| = 1)$-re $|\mathcal{A}| \le n$.

B: $A_i \longrightarrow v_i$ karakterisztikus vektor, $v_i^2 = k$ és $v_i v_j = 1$ $\forall i \neq j$
Állítás: $|A| = m$. (jelölés). Ekkor $v_1, \dots, v_m$ lineárisan független $\mathbb{R}$ felett.

B: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$. Sk-t szorozzuk $v_1$-gyel, …, $v_n$-nel!

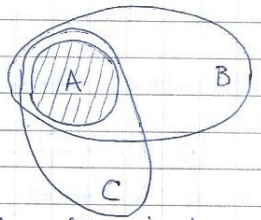
$$\left.\begin{aligned} k\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m &= 0 \\ \lambda_1 + k\lambda_2 + \dots + \lambda_m &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + k\lambda_m &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Ha a det nem 0 $\longrightarrow$ csak a csupa 0 a mo.
Ez volt algebra 1-en: $(k+n-1)\cdot(k-1)^{n-1} \neq 0$
(Feltéve, ha $k \neq 1$). Ha $k=1$, a tétel tiv. ▣

A független vektorok száma legfeljebb maga a dimenzió: $|A| \le n$ □

**Tétel.** (Bose – Fischer) $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ $A \neq B \in \mathcal{A}$ $|A \cap B| = k > 0 \Rightarrow |\mathcal{A}| \le n$.

B: 1. eset. Ha $\exists A \in \mathcal{A}$: $|A| = k$ ($|A| < k$ a feltétel miatt nem lehetséges.)
$\Rightarrow$ a többi halmaz tartalmazza $A$-t.
$B, C \supseteq A \Rightarrow (B-A) \cap (C-A) = \emptyset$
$\Rightarrow$ $[n]-A$-ban diszjunkt nemüres halmazok száma a kérdés. $\Rightarrow n-k$ (mindegyik legalább 1 elemet lefoglal).




2. eset. $\forall A \in \mathcal{A}$ $|A| > k$ $\longrightarrow$ char. vektorokra belátjuk a függetlenséget

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ négyzetre emeljük

$$\lambda_1^2 v_1^2 + \dots + \lambda_m^2 v_m^2 + 2\sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j v_i v_j = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 |A_i| + 2\sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j k = 0$$

$$\underbrace{(\lambda_1 + \dots + \lambda_m)}_{\ge 0} \cdot k + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i^2 \underbrace{(|A_i| - k)}_{\ge 0 \;>0} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$$

$v_1, \dots, v_m$ függetlenek $\Rightarrow |\mathcal{A}| = m \le n$. □

Erdős – Brunnel-könyvben benne vannak.

$\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$

**Tétel.** (triv.) $A \neq B \in \mathcal{A} : |A \cap B| \leq s-1 \implies |\mathcal{A}| \leq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{s}$

B: $\mathcal{A}_{\leq s-1} = \{ A \in \mathcal{A} : |A| \leq s-1 \}$ $\quad |\mathcal{A}_{\leq s-1}| \leq \binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{s-1}$

$\mathcal{A}_{\geq s} = \{ A \in \mathcal{A} : |A| \geq s \}$ $\quad |\mathcal{A}_{\geq s}| \leq \binom{n}{s}$ mert $\forall H \in \binom{[n]}{s}$ halmazhoz legfeljebb 1 lehet benne.

**Tétel.** $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ $\quad T \subseteq [n]$, $|T| = s$. $\forall A \in \mathcal{A}: |A| \notin T$. $\forall A \neq B \in \mathcal{A}: |A \cap B| \in T$. $\implies |\mathcal{A}| = \binom{n}{0}$

(Az előző esetben $T = \{0, 1, \dots, s-1\}$, de nem pont azt.)

B: $T = \{t_1, \dots, t_s\}$. $f_i(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{x}) = (v_i x - t_1)(v_i x - t_2) \dots (v_i x - t_s)$

ahol $v_i x$ sk. szorzat, $v_i$ karakterisztikus vektor.

$f_i(v_j) = 0$, ha $i \neq j$ és $f_i(v_i) \neq 0$. a feltétel miatt. ($v_i v_j \in T$, $v_i^2 \notin T$)

$f$ egy polinomja $x_1, \dots, x_n$-nek.

$\hat{f}_i(v_j) = f_i(v_j)$- ben $x_\ell^{\alpha \ell}$-et cseréljük $x_\ell^1$-re (elhagyjuk a kitevőt)

$\hat{f}_i(x) = f_i(x)$, ha $x$ karakterisztikus vektor. $\implies \hat{f}_i(v_j) = 0$, $\hat{f}_i(v_i) \neq 0$ $\quad i \neq j$

Multilineáris függvény: $\sum_{\ell \leq s} c(i_1, \dots, i_\ell)\, x_{i_1} \dots x_{i_\ell}$ Az összes ilyen lineáris terek alkot $\mathbb{R}$ felett.

Mennyi a dimenzió?

Bázis (tenzorszorzás): $\left\{ \prod_{i \in I} x_i \text{, ahol } |I| \leq s \right\}$. Triv. tényleg bázis.

$\dim = \#I = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{s}$

$\hat{f}_i(x)$-ek is függetlenek: $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \hat{f}_i(x) = 0$ - ban $\quad x = v_j$-re: $\lambda_j \hat{f}_j(v_j) = 0 \implies \lambda_j = 0$ $\quad \forall j$-re.

Ezek független elemei a multilineáris fv.-k terének $\implies m \leq \dim = \binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{s}$

Volt: $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ $\quad |\sigma(\mathcal{A})| \geq \frac{|\mathcal{A}| \cdot k}{n-k+1}$, ahol $\sigma(\mathcal{A})$ az árnyék (elhagyással keletkezett $k-1$-esek halmaza)

Kérdés: ha $n$ és $k$ adott és $|\mathcal{A}|$ is adott $\longrightarrow$ mán $|\sigma(\mathcal{A})| = ?$

pl. $k = 2$-re $\sigma(\mathcal{A})$ lefogható egy gráf nem izolált pontjainak halmazával

$|\mathcal{A}| = 1$ 

$|\mathcal{A}| = 2$ 

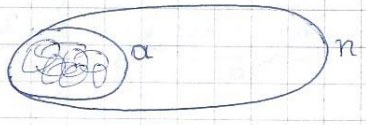
$|\mathcal{A}| = 3$

$|\mathcal{A}| = 4$

A fenti képlet becslése: $|\sigma(\mathcal{A})| \geq \frac{|\mathcal{A}| \cdot 2}{n-1}$

$\longrightarrow$ rossz, függ $n$-től, pedig nem kéne.

„Sejtés." Ha $|\mathcal{A}| = \binom{a}{k}$, akkor $|\sigma(\mathcal{A})|$ minimuma $\binom{a}{k-1}$




**Lemma** (NB.) (gyak.) $1 \leq m$ és $k$ adott: $\exists!\ 1 \leq t \leq a_t < \dots < a_{k-1} < a_k$, melyekre $m = \binom{a_k}{k} + \dots + \binom{a_t}{t}$.

**Árnyéktétel** (NB) Ha $|\mathcal{A}| = \binom{a_k}{k} + \dots + \binom{a_t}{t}$, akkor $\min |\sigma(\mathcal{A})| = \binom{a_k}{k-1} + \binom{a_{k-1}}{k-2} + \dots + \binom{a_t}{t-1}$.

Egy közelítő állítást fogunk bizonyítani.

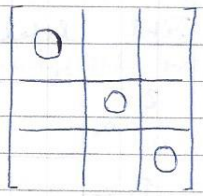
# Gráfok mátrixreprezentációja

2015. ápr. 20.

**Def** Szomszédsági mátrix (adjacenciamátrix): $A$.
Sorai és oszlopai $V = \{v_1, \dots, v_n\}$-nek felelnek meg.
$\forall i: v_{ii} = 0, \quad v_{ij} = \begin{cases} 1 & \{i,j\} \in E \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

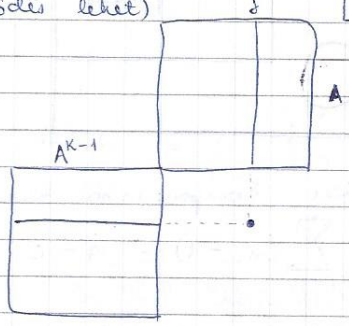
**Mj:** Nyilván $A$ szimmetrikus.

**Mj:** $\chi(G) = k \iff$ a csúcsokat megfelelően számozva $A$ ilyen alakú:



**Tétel.** $A^k_{ij}$ (az $A^k$ $i$-edik sorának $j$-edik eleme) = $v_i$ és $v_j$ közti $k$ élhosszú séták száma. (élismétlődés lehet)

**B:** indukció $k$ szerint.
$k = 1$ definíció ✓
$k-1 \to k$: $A^k = A^{k-1} \cdot A$




$$A^k_{ij} = A^{k-1}_{i1} \cdot A_{1j} + A^{k-1}_{i2} \cdot A_{2j} + \dots + A^{k-1}_{in} A_{nj} =$$

$$= \sum_{t=1}^{n} A^{k-1}_{it} A_{tj} = \sum_{\substack{1 \le t \le n \\ \{v_t, v_j\} \in E}} A^{k-1}_{it} \cdot 1 =$$

$$= \sum_{\substack{1 \le t \le n \\ \{v_t, v_j\} \in E}} \#(k-1 \text{ hosszú } v_i - v_t \text{ séták}) = \#(k \text{ hosszú } v_i - v_j \text{ séták})$$

□

**Következmény.** $A^2$ főátlójában a fokszámok állnak.

**Def** Illeszkedési mátrix (incidenciamátrix): $B$.
$V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. $\longrightarrow B \in \mathbb{F}_2^{n \times m}$
Irányítatlan esetben

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i \in e_j \\ 0 & v_i \notin e_j \end{cases}$$

(Tehát $\forall$ oszlopban 2 db 1-es lesz.)
Irányított esetben:

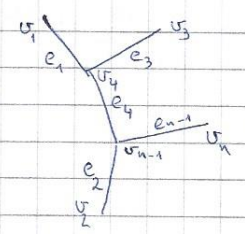
$$b_{ik} = \begin{cases} 1 & \langle v_i, v_j \rangle = e_k \\ 0 & v_i \notin e_k \\ -1 & \langle v_j, v_i \rangle = e_k \end{cases}$$

**Tétel** Összefüggő hurokmentes irányított gráf illeszkedési mátrixának rangja $r(B) = n - 1$.

**B:** Először megmutatjuk, hogy $r(B) \not\le n$. $\not\exists\, r(B) = n \longrightarrow$ sorai lineárisan lennének, de összegük a 0, tehát összefüggő $\iff r(B) \le n-1$.
Kellene: $(n-1) \times (n-1)$-es nem 0 determinánsú részmátrix.

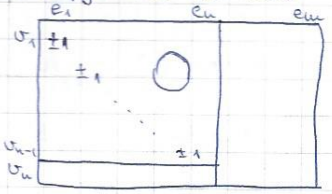
**Lemma** Adott egy $n$ csúcsú fa. Él alapján nevezni a csúcsokat $v_1, \dots, v_n$-nek, az éleket $e_1, \dots, e_{n-1}$-nek úgy, hogy $v_n$ adott és feltehető, hogy $e_i = v_i v_j$, akkor $j > i$ $(\forall i = 1, \dots, n-1)$.

**B:** A fának van legalább 2 levele (mert a fokszámösszeg $2n-2$), ezek közül legalább az egyik nem $v_n \longrightarrow$ legyen ez a $v_1$, a belőle kiinduló él $e_1$. Most tömörítjük $v_1$, $e_1$-et, a maradékra rekurzió: $v_2, e_2, \dots$
Ez jó konstrukció és nem tudunk elakadni. □




Mivel $G$ összefüggő, van feszítőfája $\longrightarrow$ számozzuk a lemma szerint. (ezzel a sor/oszlopokat permutáljuk $B$-ben).

Hogy néz ki most a B mátrix? A főátlóban $\pm 1$-ek.

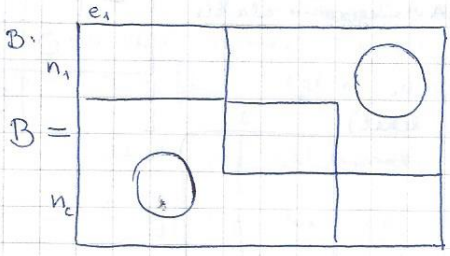



$= B$

$\rightarrow (n-1)\times(n-1)$-es $\Delta$ mátrix $\rightarrow \neq 0$ a determinánsa.

<u>Tétel</u>. Általánosabban: $c$ komponensű hurokmentes ir. gráfra $r(B) = n-c$.

B:




Csak a téglalapokban vannak nemzéró elemek.
$n-c+1$ sor közül néhány összege a 0, mert az egyik komponensből az összes sort kiválasztottak
$\Rightarrow r(B) \leq n-c$.

Megmutatjuk, hogy van $n-c$ ftlen oszlop B-ben.

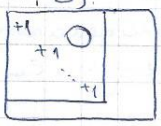
Minden komponensből kivesszük az egyik feszítőfáját. (oszlopok)

$\rightarrow \sum_{i=1}^{c} (n_i - 1) = n-c$ oszlop (él)

Nyilván a különböző alterekben levők függetlenek, mert $\perp$.
Elég megmutatni, hogy egy komponensen belül ftlenek $\rightarrow$ a fenti lemmás átrendezés miatt igaz.

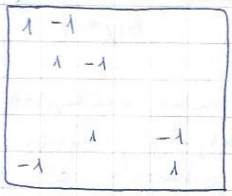
<u>Tétel</u>. Irányítatlan egyszerű összefüggő gráf illeszkedési mátrixát mod 2 tekintve a rang $n-1$.

B: A sorokat összeadva: $(2, \dots, 2) = (0, \dots, 0)$ $\Rightarrow$ rang $\leq n-1$.
Az átrendezős lemma itt is működik
$\rightarrow n-1$ ftlen van.




<u>Lemma</u>. Irányított gráfban $n-1$ oszlop független $\Leftrightarrow$ a nekik megfelelő élek feszfát alkot

B: $\Leftarrow$ irány már volt.
$\Rightarrow$: elég, hogy ha $\neg$ alkotnak feszfát $\Rightarrow \neg$ ftlenek az oszlopok.
Ha $\neg$ alkotnak fát $\rightarrow$ van kör: nem feltétlenül irányított




Ha irányított kör $\rightarrow$ összeadva összefüggők.
Ha nem $\rightarrow$ megfelelő előjellel összeadhatók, 0 lesz az összeg. ✓

<u>Def</u>. $B_0$ az a mátrix, amit B utolsó sorának elhagyásával kapunk.
$B_0$ $(n-1)\times m$-es.

$\Downarrow$

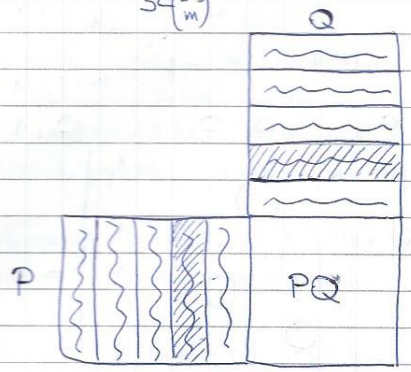
$B_0$-ban $n-1$ oszlop által adott determináns $\pm 1$, ha feszítőfa,
0, ha nem.

**Tétel** (Cauchy — Binet-formula). $P \in M^{m\times n}$, $Q \in M^{n\times m}$, ahol $m < n$, akkor

(NB)

$$\det(PQ) = \sum_{S \in \binom{[n]}{m}} \det P_{[m],S} \cdot \det Q_{S,[m]}$$

„Mi a francot jelent ez az egész? — merül fel a teljesen jogos kérdés."




$P_{[m],S}$ : minden sor, az $S$-nek megfelelő oszlopból

$Q_{S,[m]}$ : minden oszlop, az $S$-nek megfelelő sorból

$$\det(B_0 \cdot B_0^T) = \sum_{C \cdot (n-1)\times(n-1)\text{-es részmátrix } B_0\text{-ban}} \det C \cdot \det C^T = \sum_{C} \det^2 C = \sum_{C} \begin{cases} 1 & C \text{ feszítőfa} \\ 0 & \text{nem} \end{cases} =$$

= a feszítőfák száma. Hogy vét ki $B_0 \cdot B_0^T$? Előállítható a sorvat determinánsával kiszámolása?

$$B \cdot B^T = \begin{bmatrix} d(v_1) & & \\ & d(v_2) & \\ & & \ddots \\ & & d(v_n) \end{bmatrix}$$

$d(v)$ a fokszám

$$(BB^T)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ha } \{v_i, v_j\} \notin E \\ -1 & v_i v_j \in E \end{cases}$$

| | |
|---|---|
| ... | −1 |
| ... | +1 |

Laplace-mátrix

$B_0 B_0^T$ a Laplace-mátrix utolsó sorával és oszlopával törlésével kapható.

**Tétel** (Kirchhoff) Egy egyszerű összefüggő gráf feszítőfáinak száma egyenlő a Laplace-mátrix utolsó sorával és oszlopával törlésével kapott mátrix determinánsával. □

Nyilvánvaló, hogy melyik $v_i$-hez tartozó sor-oszlop párt töröljük.

**Tétel** (Cauchy) A $K_n$ teljes gráf feszítőfáinak száma $n^{n-2}$.

(Ez a Prüfer-kóddal már látható.)

$$B_0 = \begin{bmatrix} n-1 & (-1) & & \\ & n-1 & & \\ & & \ddots & \\ (-1) & & & n-1 \end{bmatrix}_{n-1}$$

$$\det B_0 = n^{n-2} \cdot 1$$

□

Hány olyan feszítőfa van, ami tartalmaz $k$ darab előre adott élet, $k \le \frac{n}{2}$?

$g(n,i)$ = $i$ db vágással független élet nem tartalmazó feszítőfák száma.

A megoldás mikéssel: $\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} g(n,i)$

$g(n,i) = K_n$ — ($i$ db ftlen él) feszítőfáinak száma

$$g(n,i) = \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} n-2 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & n-2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & n-2 \end{matrix} & -1 \\ \hline -1 & \begin{matrix} n-1 & & -1 \\ & \ddots & \\ -1 & & n-1 \end{matrix} \end{array}\right| \begin{matrix} \}\, 2i \\ \}\, n-2i-1 \end{matrix} = \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} n-2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n-2 \end{matrix} & -1 \\ \hline -1 & \begin{matrix} n-1 & & -1 \\ & \ddots & \\ -1 & & n-1 \end{matrix} \\ \hline 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \end{array}\right| \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{matrix} =$$

$$= \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n-1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & n-1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n \end{matrix} \\ \hline 1 \cdots 1 & 1 \cdots 1 \end{array}\right| \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{matrix} = \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} n-1 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & n-1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n \end{matrix} \\ \hline & \end{array}\right| \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \frac{1}{n} \end{matrix} =$$

az első $n-1$ sor összegét kivonjuk az utolsóból

$$= \det \begin{bmatrix} n-1 & 1 \\ 1 & n-1 \end{bmatrix}^i \cdot n^{n-2i-1} \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= (n-2)^i \cdot n^{n-2-i}$$

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \cdot (n-2)^i \, n^{n-2-i} = n^{n-k-2} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (n-2)^i \, n^{k-i} =$$

$$= n^{n-k-2} \cdot (n-(n-2))^k = n^{n-k-2} \cdot 2^k.$$

$k = 0 \longrightarrow n^{n-2}$, ez már ismert ✓

$2k = n \longrightarrow (2k)^{k-2} \cdot 2^k = 4^{k-1} \cdot k^{k-2}$.

Ez látható egyszerűbben is

$\longrightarrow$ 4 lehetőség

2015.04.27.

## Gráfok sajátértékei

**Def.** A $G$ gráf adjacenciamátrixának sajátértékeit $G$ sajátértékeinek nevezzük.
A sajátértékek multiplicitással vett összessége a gráf spektruma.

Megjegyzés. $Av = \lambda v \iff v$ szerint számokat írva $G$ csúcsaira minden csúcs érte
$\lambda$-szorosa a szomszédai összegének.

**Alaptulajdonságok**

$A \in M^{n \times n}$, $A^T = A$, $A$ főátlójában 0-k állnak

$n$ darab sajátérték van, mivel $A$ szimmetrikus, ezek mind valósak.

$A$ különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok merőlegesek (gyakorlatban).

$\Rightarrow$ kiválasztható sajátvektorokból álló ONB.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{Sp} A = 0$$

**Állítás.** Ha $G$ $d$-reguláris és összefüggő, akkor a legnagyobb abszolút érték sajátérték $d$ és multiplicitása 1.

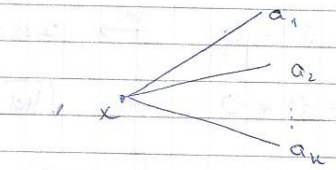
B: $d$ sajátérték, mert $v = (1, 1, \dots, 1)$-hez tartozó sajátérték.
Nem lehet nagyobb abszol. értékű sé. ↯ $|D| > |d|$, $Av = Dv$

Legyen $v$ legnagyobb abs. értékű eleme $x$.

$k \leq d$. a regularitás miatt.

$Dx = a_1 + \dots + a_k$

$|D||x| \leq |a_1| + \dots + |a_k| \leq d \cdot |x|$ ↯.




Kell még hogy $d$ egyenes. Legyen $Av = dv$, $v$ legnagyobb abs. értékű eleme $x$.

$dx = a_1 + \dots + a_n$

$d|x| \leq |a_1| + \dots + |a_n) \leq d \cdot |x|$ $\Rightarrow$ kell, hogy $a_1 = \dots = a_n$ legyen

A összefüggőség miatt az egyenlőség fejed $\longrightarrow$ 1 dimenziós altér, $\langle (1, \dots, 1) \rangle$. □

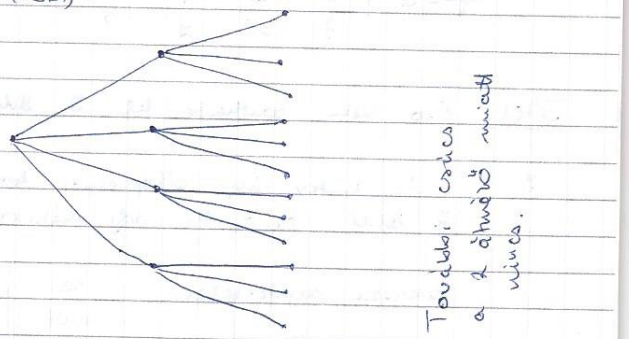
**Tétel** (Hoffmann — Singleton). Ha $G$ olyan $d$-reguláris véges egyszerű gráf, melynek átmérője 2, de nincs benne sem $C_3$, sem $C_4$, akkor $d \in \{2, 3, 7, 57\}$.

$d = 2$ , $d = 3$ Petersen, $d = 7$-re H—S-konstrukció, $d = 57$-re nem ismert, hogy van-e.
És 2, 3, 7-re izomorfia erejéig egyértelmű (NB)

B: Először meghatározzuk a csúcsok számát.

$\Rightarrow |V| = 1 + d + d^2 - d = d^2 + 1$.

Tfh. $d$-re $\exists G$, legyen $A$ az adjacenciamátrix.




$$A^2 = \begin{bmatrix} d & & & j \\ & d & & \vdots \\ & & \ddots & \\ i & \cdots & \cdots & A^2_{ij} \\ & & & \ddots \\ & & & & d \end{bmatrix}$$

$i \neq j$

$A^2_{ij}$ = $v_i$ és $v_j$ közös szomszédainak száma

↳ Ha $v_i$ és $v_j$ szomszédosak $\longrightarrow$ 0 ($\not\supset C_3$)

↳ Ha $v_i$ és $v_j$ nem szomszédosak $\longrightarrow$ 1 (2 átmérő, $\not\supset C_4$)

különbözőnek, mert $C_3, C_4$ nincs

$$\Downarrow$$

$$A^2 + A = \begin{bmatrix} d & & & \\ & d & & 1 \\ & & \ddots & \\ & 1 & & d \end{bmatrix} = (d-1)I + \mathcal{J}, \quad \text{ahol} \quad \mathcal{J} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

M.ié lehetnek $A$ sajátértékei?

$d$ sajátérték, 1 multiplicitással, sajátvektora $\underline{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \underline{j}^T \\ \vdots \\ \underline{j}^T \end{bmatrix}$.

A többi sajátvektor merőleges $\underline{j}$-re.

Legyen $\lambda \neq d$ sajátérték, $A \cdot v = \lambda v$, $v \neq 0$ sajátvektor.

$(A^2 + A)v = (d-1)Iv + \mathcal{J}v$

$AAv + Av = \lambda^2 v + \lambda v$; $\quad (d-1)Iv = (d-1)v + 0$

$\Rightarrow [\lambda^2 + \lambda - (d-1)]v = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \lambda - (d-1) = 0 \quad \Rightarrow$ legfeljebb 2 további sé. lehet,

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4d-3}}{2} \longrightarrow$

| sé. | $d$ | $\frac{-1+\sqrt{4d-3}}{2}$ | $\frac{-1-\sqrt{4d-3}}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|
| multipl. | 1 | $m_1$ | $m_2$ | $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ |

$$\begin{cases} 1 + m_1 + m_2 = 1 + d^2 \\ 1 \cdot d + m_1 \cdot \dfrac{-1+\sqrt{4d-3}}{2} + m_2 \cdot \dfrac{-1-\sqrt{4d-3}}{2} = 0 \end{cases}$$

Innen ki lehetne számolni $m_1$-et és $m_2$-t, de erre nem lesz szükségünk.

$m_2 = d^2 - m_1 \longrightarrow d + m_1 \cdot \dfrac{-1+\sqrt{4d-3}}{2} + (d^2 - m_1) \cdot \dfrac{-1-\sqrt{4d-3}}{2} = 0$

$$d - \frac{d^2}{2} + \frac{\sqrt{4d-3}}{2} \cdot (2m_1 - d^2) = 0$$

$$2d - d^2 + \sqrt{4d-3}\,(2m_1 - d^2) = 0 \qquad (*) \qquad m_1 \in \mathbb{Z}$$

1. eset: $2m_1 - d^2 = 0 \xrightarrow{(*)} 2d - d^2 = 0 \longrightarrow d = 0$ vagy $d = 2$ ✓ Tiltható ott egy kivétel jegyzetelés, vagy mit csinálta?

2. eset: $2m_1 - d^2 \neq 0 \xrightarrow{(*)} \sqrt{4d-3} = \frac{d^2-2d}{2m_1 - d^2} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ $(\sqrt{m} \in \mathbb{Q} \Rightarrow m = k^2,\ k \in \mathbb{Z})$ $\sqrt{4d-3} = k$, $\sqrt{4d-3}^2 = k^2$, $d = \frac{k^2+3}{4}$

(*): $\frac{k^2+3}{2} - \frac{(k^2+3)^2}{16} + k\left(2m_1 - \frac{(k^2+3)^2}{16}\right) = 0$ „Ezt is úgy igazán nyugodtan nem-tiltottnak."

$8(k^2+3) - (k^2+3)^2 + 32 k m_1 - k\cdot(k^2+3)^2 = 0$ pótolva $k$-ban.

$-k^5 + ?\,k^4 + ?\,k^3 + ?\,k^2 < ?\,k + 15 = 0$

$C \cdot k + 15 = 0 \quad \Rightarrow k \mid 15$

| $k$ | 1 | 3 | 5 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{k^2+3}{4} = d$ | 1 | 3 | 7 | 57 |
| | ↯ | ✓ | ∃ | ? |

Ezzel 2, 3, 5, 57 megfelelő. ✓ □

Tétel: $K_{10}$ nem bontható fel 3 éldiszjunkt Petersen-gráfra.

B: „Az ember úgy elképzelné, hogy lehet, de nem."
↯ lehet. $P_1, P_2, P_3$ adj. mátrixok $\longrightarrow$ $P_1 + P_2 + P_3 = J_{10} - I_{10}$

Petersen sajátértékei:

| sé. | 3 | $\frac{-1+\sqrt{4\cdot3-3}}{2} = 1$ | $\frac{-1-\sqrt{4\cdot3-3}}{2} = -2$ |
|---|---|---|---|
| mult. | 1 | $m_1$ | $m_2$ |

$m_1 + m_2 = 9$, $3 + m_1 - 2m_2 = 0$ $\Rightarrow$ $m_1 = 5$, $m_2 = 4$

Ezek sé.-ei $P_1, P_2, P_3$-nak csak más sajátaltérrel

$P_1$ 1-hez tartozó sajáltere 5 dimenziós, hiszen van a $\perp$-re 1 dim. altere.
$P_2$ 1-hez — " — — " — — " —
$\Rightarrow$ mivel $5 + 5 > 9$, $\exists v \neq 0$: $P_1$-nek és $P_2$-nek is sajátvektora 1-hez, mert $P_1 v = v$ és $P_2 v = v$.

$(P_1 + P_2 + P_3)v = (J - I)v$

$v + v + P_3 v = 0 - v$ $\Rightarrow$ $P_3 v = (-3)v$, $(-3)$ sajátértéke $P_3$-nak. ↯ □

Tétel: Ha egy véges, egyszerű, összefüggő gráfnak csak 2 különböző sajátértéke van, akkor teljes gráf.

Megjegyzés: a teljes gráf sajátértékei: $n-1$ : 1-szeres, ui.: $\downarrow$
$-1$ : $(n-1)$-szeres, ui.: akkor $\neq$ kard.összeg $0$ $(\perp j)$

B: 1. lépés. Legyenek a sajátértékek $\lambda$ és $\mu$; feltehető $\lambda \geq \mu$ az összeg miatt; $\lambda > 0 > \mu$.
$B := A^2 - (\lambda+\mu)A + \lambda\mu I$ Belátjuk, hogy $B = 0$.
Belátjuk, hogy $\forall v$: $B \cdot v = 0$.
$\forall v \in \mathbb{R}^n$ felírható $v = u + w$, ahol $Au = \lambda u$ és $Aw = \mu w$ (sajátértékekből adódó bázis)

$Bv = A^2(u+w) - (\lambda+\mu)A(u+w) + \lambda\mu I(u+w) =$
$= A(\lambda u + \mu w) - (\lambda+\mu)(\lambda u + \mu w) + \lambda\mu u + \lambda\mu w =$
$= \lambda^2 u + \mu^2 w - \lambda^2\mu - \lambda\mu w - \lambda\mu u - \mu^2 w + \lambda\mu u + \lambda\mu w = 0.$

2. lépés: Belátjuk, hogy $G$ reguláris.

$B_{ii} = 0$; $\quad B_{ii} = A^2_{ii} - (\lambda+\mu) A_{ii} + \lambda\mu I_{ii} = d_i + \lambda\mu = 0 \quad (\forall i)$

$\Rightarrow$ $G$ reguláris, $d = -\lambda\mu$.

3. lépés: Belátjuk, hogy $G$ teljes.

Mivel $(-\lambda\mu)$ - reguláris, ezért $(-\lambda\mu)$ egyszeres sajátértéke.

$-\lambda\mu > 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda\mu = \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda \neq 0$ miatt $\mu = -1$, mult. $= n-1$.

A mult. vett összeg: $1 \cdot \lambda + (n-1)(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = n-1$.

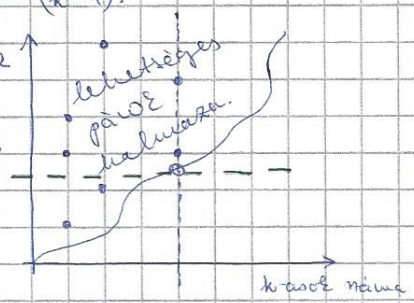
$-\lambda\mu = -(n-1)(-1) = n-1$, ennyi a regularitás $\Rightarrow$ teljes gráf. $\square$

Az ánnyéltétel egy általánosított változata. 2015. május 4.

Definíció. $x \in \mathbb{R}$ : $\binom{x}{k} = \frac{x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-k+1)}{k!}$

Tétel (Ánnyéltétel Lovász-féle változata). $|\mathcal{A}| = \binom{x}{k} \Rightarrow |\partial(\mathcal{A})| \geq \binom{x}{k-1}$.

B: (Keevash, 2008)




Fordítva nézzük: a $(k-1)$-esek oldalairól (véletlenszerűen), látható, hogy ez ekvivalens a függőleges minimum keresésével

Adott egy $\mathcal{B} \subset \binom{[n]}{k-1}$. Keresendő a belőlük kirakható $k$-asok száma.

Tfh. $|\mathcal{B}| = \binom{x}{k-1}$. ~~Kell~~ $t(\mathcal{B}, k)$ = a $\mathcal{B}$-ből alkotható $k$-asok halmaza.

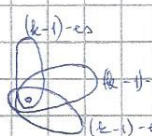
Kell: $|t(\mathcal{B}, k)| \leq \binom{x}{k}$.

Indukcióval bizonyítunk, $k$ szerint.

$k = 2$: $x$ darab 1 elemű halmaz ($\Rightarrow x \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow \binom{x}{2}$ 2-es rakható ki. ✓

$k-1 \Rightarrow k$.

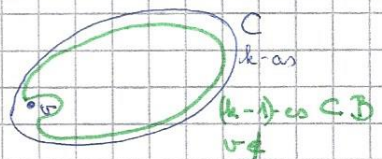
Legyen $d(v)$ (fok): $v$-t tartalmazó $\mathcal{B}$-beliek száma,
$\mathcal{B}(v)$ $v$-t tartalmazó $\mathcal{B}$-beliekből $v$ elhagyásával kapottak ($\mathcal{B}(v) \subset \binom{[n]}{k-2}$)




$d(v) \geq 1$ feltehető, ($n$ kicsi, $(n-1)$ mindegy.)

1. állítás. $|t(\mathcal{B}, k)(v)| \leq |\mathcal{B}| - d(v)$.

B: $C \in t(\mathcal{B}, k)$, $v \in C$
$\Rightarrow C \setminus \{v\} \in \left(t(\mathcal{B}, k)(v) - \{v\}\right)$ → felesleges
amiben benne van a $v$, majd elhagyjuk

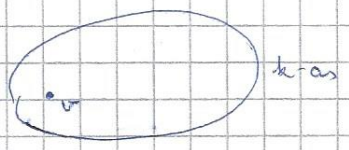



1

2. állítás. $|t(\mathcal{B}, k)(v)| \leq |t(\mathcal{B}(v) - v, k-1)|$ → felesleges

„Faji, de bonyolult ez!"

B: $t(\mathcal{B}, k)(v)$ $k-1$-esek
$t(\mathcal{B}(v))$ $k-2$-esek
Minden $k-2$-es abban a rendszerben van, amiből kiadják.




2

3. állítás. $|t(\mathcal{B}, k)(v)| \leq \left(\frac{x}{k-1} - 1\right) d(v)$

B: 1) Ha $d(v) \geq \binom{x-1}{k-2}$: 1. áll. miatt $|t(\mathcal{B}, k)(v)| \leq \underbrace{\binom{x}{k-1}}_{|\mathcal{B}|} - d(v) \overset{?}{\leq} \left(\frac{x}{k-1} - 1\right) d(v)$

$\Leftrightarrow \binom{x}{k-1} \overset{?}{\leq} \left(\frac{x}{k-1}\right) \cdot d(v) \leq \frac{x}{k-1} \cdot \binom{x-1}{k-2}$ Igaz a feltétel miatt. ✓

2) Ha $d(v) < \binom{x-1}{k-2}$: Legyen $d(v) = \binom{x_v - 1}{k-2}$. $\exists x_v$, mert $\binom{y-1}{k-2}$ folytonos és

sz. monoton $y \geq k-1$-re $\Rightarrow x_v$-re becslés is van, $k-1 \leq x_v < x$.

$$|t(B(v), k-1)| \underset{\text{indukció}}{\leq} \cancel{d(v) \leq} \binom{x_v - 1}{k-1} = \left(\frac{x_v - 1}{k-1}\right) d(v) = \left(\frac{x_v}{k-1} - 1\right)\binom{x_v - 1}{k-2} =$$

$$\vee\!\!/\!\!/$$

$$|t(B, k)(v)|$$

$$= \frac{x_v - k + 1}{k-1} \cdot \binom{x_v - 1}{k-2} < \left(\frac{x}{k-1} - 1\right) d(v) \quad \boxed{3}$$

A bizonyítás befejezéséhez kettős leszámlálunk:

$(H, v)$ párok, $v \in H$, $\in t(B, k)$.

$|H| = k$

$$\underbrace{k \cdot |t(B, k)|}_{H \text{ rögz.}} = \underbrace{\sum_v t(B, k)(v)}_{v \text{ rögzített}} \underset{\text{3. állítás}}{\leq} \sum_v \left(\frac{x}{k-1} - 1\right) d(v) = \left(\frac{x}{k-1} - 1\right) \sum_v d(v) =$$

$$= \left(\frac{x}{k-1} - 1\right) \cdot (k-1) \cdot |B|.$$

$$\Rightarrow k \cdot |t(B, k)| \leq \left(\frac{x}{k-1} - 1\right)(k-1) \cdot |B| = \left(\left(\frac{x}{k-1}\right) - 1\right)(k-1) \cdot \binom{x}{k-1} = (x - k + 1) \cdot \binom{x}{k-1}$$

$$\Rightarrow |t(B, k)| \leq \binom{x}{k} \quad \square$$

„T. Sós Vera, aki kiváló matematikus és gyönyörű nő is volt."

## Részbenrendezett halmazok

Ld. Elekes–Brunczer

Partially ordered set, poset (poszet magyarul is)

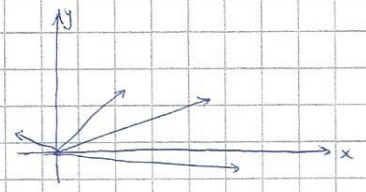
Definíció: $(H, \prec)$ pár részbenrendezett halmaz, ha

1) $\forall x, y \in H$: $x \prec y$, $x = y$, $x \succ y$ közül legfeljebb 1 teljesül;

2) $\forall x, y, z \in H$: $x \prec y$, $y \prec z \Rightarrow x \prec z$.

Példák: 1) teljes rendezés.

2) 2 dimenziós vektorok, ha mindhét hoord $\leq$.




3) oszthatóság $\mathbb{Z}$-n vagy egy részhalmazán.

4) $H = 2^{[n]}$, $\prec = \subsetneq$

Definíció: Lánc: $a_1 \prec a_2 \prec \dots \prec a_k$ $(a_i \in H)$ $\longrightarrow$ teljes rendezés van rajta.

Antilánc: $b_1, \dots, b_k$, ha $\forall i \neq j$-re $b_i$ és $b_j$ összehasonlíthatatlan.

Tétel. (Dilworth) Maximális méretű antilánc mérete = minimális számú diszjunkt lánc, amire $H$ felbontható.

Példa: $H = 2^{[n]}$ $\longrightarrow$ Sperner-tétel, $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, ld. a 3. bizonyítást.

B: (várlat) $\leq$: triví, 1 láncból legfeljebb 1-et lehet kivenni.

$\geq$: ha $A$ egy max antilánc, akkor $\exists$ $|A|$ db láncból álló felbontás

Indukció $|H| = n$ szerint.

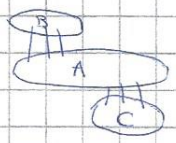
$n = 2$: $\bullet$ ✓ | $\circ$ $\circ$ ✓ triví

$n$-nél kisebbek $\Rightarrow$ $n$.

**Állítás.** $A$ maximális antiláncra, $h \notin H$ tetszőleges elem $\Rightarrow$ $h$ $A$ alatt vagy felett van.

**B:** $\lightning$ $\exists a \in A: a \prec h$, $\exists b \in A: h \prec b \Rightarrow a < b$ $\lightning$ $\boxed{A}$

1. eset: Ha $\exists$ olyan maximális $A$, ami felett és alatt is vannak elemek.
(Rendre $B$ és $C$). $B, C \neq \emptyset$




$A \cup B$ is poset, amire $|A \cup B| < |H|$ $\rightarrow$ indukció:
van $|A|$ db lánc, amire felbonthatóság; ezek átmennek $\forall$ $A$-beli elemen.

Ugyanez $A \cup C$-re is elvégezhető.
Ezen láncok összetétele megfelelő
$\Rightarrow$ $|A|$ db lánc. ✓

2. eset: $\forall$ maximális $A$-ra $B = \emptyset$ vagy $C = \emptyset$. $\rightarrow$ Ez már elég erős feltétel.
JH is kellenek esetek.