Lineáris algebra pótzh

2016. december 16.

Mindegyik lapra írd rá a nevedet (neptunkód nem kell).

A feladatok nem feltétlenül nehézségi sorrendben következnek, és tetszőleges sorrendben kidolgozhatók. Valamennyi feladat 10 pontot ér, részpontszám is kapható. Az 1. feladat kivételével végeredmény önmagában nem elegendő, megfelelő indoklás szükséges. Törekedj a világos leírásra (csak arra adok pontot, ami le van írva és el tudom olvasni). Nem kell minden feladat megoldását külön lapra írni. Íróeszközökön kívül semmilyen segédeszköz nem használható.

A pótzh a rosszabbul sikerült zh-t javítja; ha az eredménye mindkét zh-nál rosszabb, akkor az eredménye nem számít. Egy zh a félévi jegy 40%-át teszi ki. Ponthatárok: 5: 46–70 pont; 4,5: 41–45 pont; 4: 36–40 pont; 3,5: 31–35 pont; 3: 26–30 pont; 2,5: 21–25 pont; 2: 16–20 pont; 1,5: 11–15 pont; 1: −10–10 pont. Az elégséges gyakorlati jegyhez mindkét zh-n legalább 16 pontot el kell érni.

Jó munkát!

1. feladat. Igazak vagy hamisak a következő állítások? (Indokolni nem kell. Minden helyes válasz 2 pontot, minden rossz válasz -2 pontot ér; a válasz hiánya 0 pont. A választ ne a feladatsorra írd, azt nem szedem be.)

a) $\mathbb{R}^n$-ben minden $n+1$ elemű vektorrendszer lineárisan összefüggő.

b) Invertálható mátrixok összege is invertálható.

c) Ha egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix rangja legalább $n/2$, akkor a determinánsa pozitív.

d) Ha az $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok karakterisztikus polinomjai megegyeznek, akkor $A \sim_{\mathbb{R}} B$.

e) Minden $\mathbb{R}^{n\times n}$-beli mátrix karakterisztikus polinomja n-edfokú.

2. feladat. Oldd meg a következő egyenletrendszert elemi bázistranszformációval! (Más módszerrel való megoldás legfeljebb 1 pontot ér.)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 13 \\ 2x_1 \qquad + \ x_3 &= 6 \\ -x_1 + \ x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 - \ x_2 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

3. feladat. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ adott és legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Határozd meg $r(A)$-t és A^{-1}-et (ha létezik)!

4. feladat. Legyenek $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ adottak, továbbá

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \, \gamma x + w = 2,\ \delta z - w = y \right\}, V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \, \gamma w + \delta x = 0,\ y = \gamma\delta z \right\}$$

a) Altere-e V_1, illetve V_2 $\mathbb{R}^4$-nek?

b) Ha valamelyik altér, akkor adj meg benne egy bázist, és határozd meg a dimenzióját.

5. feladat. Számítsd ki azt az $n \times n$-es determinánst, aminek a főátlójában csupa 1-es, azon kívül pedig csupa 2-es áll!

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

6. feladat. Legyen $A = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Írd fel A karakterisztikus polinomját! (2 pont)

b) Számítsd ki A sajátértékeit! (2 pont)

c) Határozd meg az egyes sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat! (2 pont)

d) Add meg az egyes sajátértékekhez tartozó sajátaltereket! (2 pont)

e) Állapítsd meg, hogy A diagonalizálható-e (a gondolatmenetet is írd le); ha igen, írj fel egy olyan diagonálmátrixot, amihez hasonló! (2 pont)

7. feladat. Az alábbi mátrixok között melyek hasonlók $\mathbb{R}$ felett? (Teljes megoldásnak az számít, ami a felsorolt mátrixok közül *bármely kettőről* megállapítja, hogy hasonlók-e vagy sem.)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$