Lineáris algebra zh

2016. október 25.

Mindegyik lapra írd rá a nevedet (neptunkód nem kell).

A feladatok nem feltétlenül nehézségi sorrendben következnek, és tetszőleges sorrendben kidolgozhatók. Valamennyi feladat 10 pontot ér, részpontszám is kapható. Az 1. feladat kivételével végeredmény önmagában nem elegendő, megfelelő indoklás szükséges. Törekedj a világos leírásra (csak arra adok pontot, ami le van írva és el tudom olvasni). Nem kell minden feladat megoldását külön lapra írni. Íróeszközökön kívül semmilyen segédeszköz nem használható.

A zh a félévi jegy 40%-át teszi ki. Ponthatárok: 5: 46–70 pont; 4,5: 41–45 pont; 4: 36–40 pont; 3,5: 31–35 pont; 3: 26–30 pont; 2,5: 21–25 pont; 2: 16–20 pont; 1,5: 11–15 pont; 1: −10–10 pont. Az elégséges gyakorlati jegyhez mindkét zh-n legalább 16 pontot el kell érni.

1. feladat. Igazak vagy hamisak a következő állítások? (Indokolni nem kell. Minden helyes válasz 2 pontot, minden rossz válasz −2 pontot ér; a válasz hiánya 0 pont. A választ ne a feladatsorra írd, azt nem szedem be.)

a) Egy n vektor által generált altér dimenziója legfeljebb n.

b) $\mathbb{R}^n$-ben minden n elemű generátorrendszer bázis.

c) Ha egy mátrix invertálható, akkor az inverze is invertálható.

d) Ha $A, B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, akkor $AB \neq \mathbf{0}$-ból következik, hogy $BA \neq \mathbf{0}$.

e) Van olyan lineáris egyenletrendszer, aminek pontosan két megoldása van.

2. feladat. Lineárisan függetlenek-e $\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix}$? Igaz-e, hogy $\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix} \in \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix}\right)$?

3. feladat. Oldd meg a következő egyenletrendszert elemi bázistranszformációval! (Más módszerrel való megoldás legfeljebb 1 pontot ér.)

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 \phantom{{}+2x_3} - 2x_4 &= 6\\
x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2\\
x_2 - x_3 + x_4 &= 8\\
x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 + x_4 &= 6
\end{aligned}$$

4. feladat. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ adott és legyen $A = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ \alpha & 1 & \alpha\end{bmatrix}$. Határozd meg $r(A)$-t és A^{-1}-et (ha létezik)!

5. feladat. Legyenek $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ adottak, továbbá

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} \middle| \, \gamma x_1 + \gamma\delta x_2 + \delta x_3 = 0 \right\}, V_2 = \left\{ \begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix} \middle| \, \gamma y_1 + \delta y_2 = 1,\ y_3 = \gamma\delta y_4 \right\}$$

a) Altere-e V_1, illetve V_2 $\mathbb{R}^4$-nek?

b) Ha valamelyik altér, akkor adj meg benne egy bázist.

6. feladat. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \in \mathbb{R}^n$ vektorok között pontosan egy olyan van, ami lineárisan függ a többi $m-1$ vektortól. Bizonyítsuk be, hogy ekkor ez szükségképpen a nullvektor.

7. feladat. Legyen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ $\mathbb{R}^3$ egy (nem feltétlenül standard) bázisa, és legyen $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$. Milyen feltétel kell fennálljon az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ számokra, hogy $\mathbf{e}_1 + \mathbf{v}, \mathbf{e}_2 + \mathbf{v}, \mathbf{e}_3 + \mathbf{v}$ is bázis legyen?