Kiegészítés

2016. 11. 14

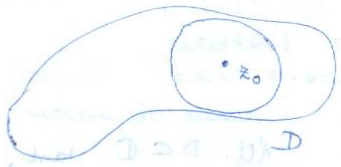
Def. $D \subset \mathbb{C}$ tart., $u: D \to \mathbb{R}$ folyt. középértéktulajdonságú, ha $\forall z_0 \in D$ $\exists \rho > 0$, hogy $\forall\, 0 < r < \rho$:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\vartheta})\, d\vartheta.$$

Tétel. $u: D \to \mathbb{R}$ folyt. és középértéktulajdonságú $\Rightarrow$ harmonikus.

B: $\overline{D}_r(z_0) \subset D$ és $r < \rho$

Legyen $h = u|_{\partial D_r(z_0)}$. Legyen $\tilde{u}$ a Dirichlet-feladat megoldása. $v := u - \tilde{u} \Rightarrow v|_{\partial D_r(z_0)} \equiv 0$



Belátjuk, hogy $v \equiv 0$ $D_r(z_0)$-ban; ez elég.

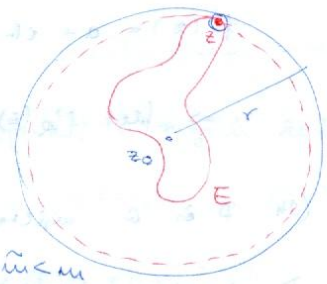
A KÉT teljesül v-re, mert u-ra és $\tilde{u}$-ra teljesül, $D_r(z_0)$-ban.

Belátjuk, hogy $v \leq 0$. Ez elég lesz, mert fordított szerepcsérét is lehet venni.

$\lightning$ $\max v = m > 0$. $E = \{z \in \overline{D}_r(z_0) : v(z) = m\} \subset \overline{D}_r(z_0)$ kpt.

$\Rightarrow \exists z \in E: |z - z_0| \geq |\tilde{z} - z_0| \quad \forall \tilde{z} \in E.$

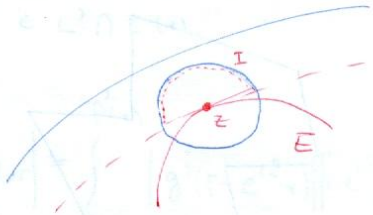
z-ben KÉT v-re:



$$m = v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z + s \cdot e^{i\vartheta})\, d\vartheta =$$

$\underbrace{|I| = \pi}_{\text{szögmértéK}}$*, $\zeta \in I$-re $v(\zeta) < m$, $\zeta \notin E$, $\max\limits_{\zeta \in I} v = \tilde{m} < m$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_I \underbrace{v(z + s \cdot e^{i\vartheta})}_{\leq \tilde{m}}\, d\vartheta + \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi] \setminus I} \underbrace{v(z + s \cdot e^{i\vartheta})}_{\leq m}\, d\vartheta \leq$$



$$\leq \frac{\tilde{m} \cdot \cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} + \frac{m \cdot \cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} < m \quad \lightning$$

$\Rightarrow u$ harmonikus. $\square$

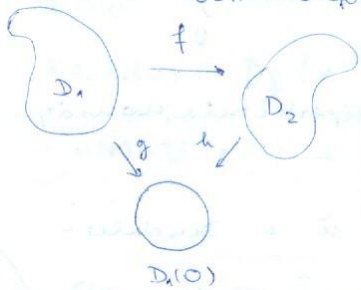
* I alkalmasan választható félkörök E-n kívül

Tétel. (Carathéodory) $D \subset \mathbb{C}$ Jordan, $f: D \to D_1(0)$ konform.

$\Rightarrow$ f kiterjed $\overline{D} \to \overline{D_1(0)}$ homeomorfizmussá.

(Csak körülvonal által határolt J-tartományra látjuk be.)

Mj. Köv: f Jordanon szerint konform is kiterjed homeomorfizmussá.



g, h kiterjed

$\Rightarrow f = h^{-1} \circ g$ is.

$\square$

Áll. $D \subset \mathbb{C}$ tart., $f: D \to G$ konform, $G = f(D)$.

$$\Rightarrow \lambda(G) = \iint_D |f'|^2 \, dx\,dy$$

B: Valós analízisből. $f = (u, v): D \to G$

$$\Rightarrow \lambda(G) = \lambda(f(D)) = \iint_D |\det f'_{\mathbb{R}}| \, dx\,dy \quad \text{(ismert)}$$

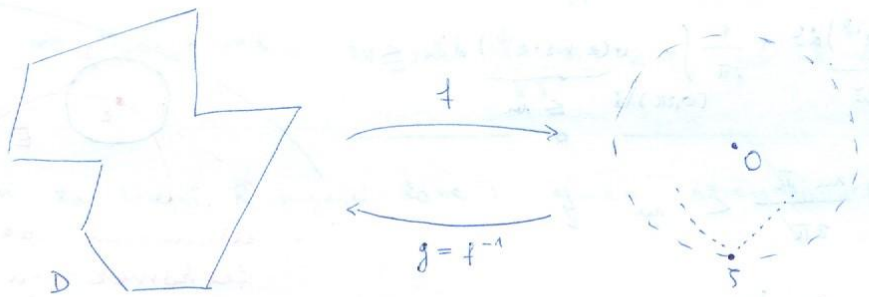
$$f'(z) = a + ib \quad \Rightarrow \quad f'_{\mathbb{R}}(z) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{CR miatt}$$

$$\Rightarrow |\det f'_{\mathbb{R}}(z)| = a^2 + b^2 = |f'(z)|^2$$

$\boxed{A}$

(HF D és G nyílt (ny.l.t.), a mérhetőséget fel se szellett tenni.)

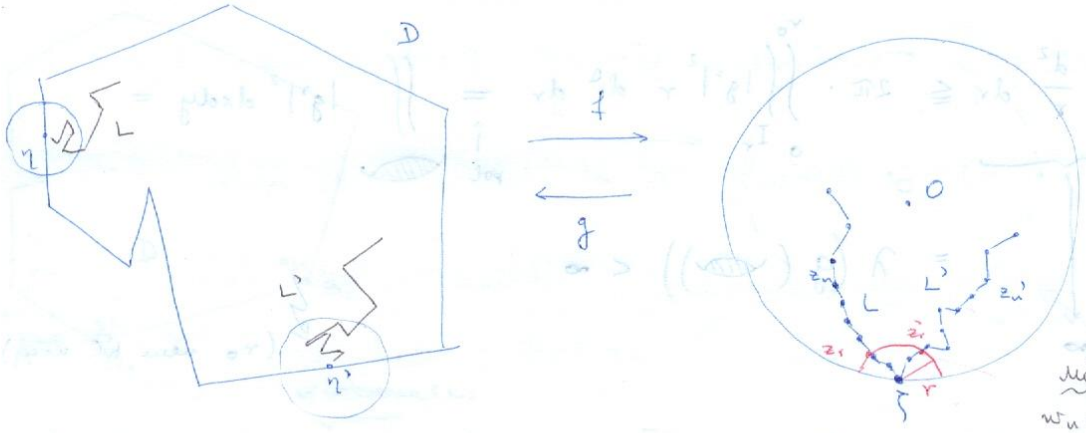
B_{CT}: D határa körülvonal.



Lemma.

$$\left.\begin{array}{l} z_n, z_n' \in D_1(0), \quad z_n \to \zeta, \quad z_n' \to \zeta \\ g(z_n) \to \eta, \quad g(z_n') \to \eta' \end{array}\right\} \Rightarrow \eta = \eta'$$

B_L: Konformitás miatt $\eta, \eta' \in \partial D$ (mert ha belső pontnak konvergálna, akkor $f(\eta) \in D_1(0)$ lenne).



módosítás:
$w_n = g(z_n)$, $w_n' = g(z_n')$, L és L' ezek összerakásával keletkezik. Tehát nyugodt azt D-ben ovnáljuk, nem $D_1(0)$-ben. Az sem magából értelődő, hogy az összerakás elvégezhető, itt pl. nem:

A jelölt pontoknak nincs olyan folyt. összerakása, ami ζ-hoz tartana.

$\exists \delta > 0 : \quad \bar{D}_\delta(\eta) \cap \bar{D}_\delta(\eta') = \emptyset$

$\exists n_0 : \quad n \geq n_0 \Rightarrow g(z_n) \in D_\delta(\eta), \quad g(z_n') \in D_\delta(\eta')$; mostantól mindig csak ilyen nagy n-ekre nézzük.

$L, L' \subset \bar{D}_1(0)$ folyt. görbék, az egymás utánjaik töröttvonallal való összerakása, ζ-t is beleértve.

$g(L \setminus \zeta) \subset D_\delta(\eta), \quad g(L' - \zeta) \subset D_\delta(\eta')$

$d := \text{táv}\left(\bar{D}_\delta(\eta), \bar{D}_\delta(\eta')\right) > 0.$

$r > 0$ elég kicsiny, hogy $I(r)$ a ζ középpontú, r sugarú körív $D_1(0)$-ba eső része.

$\forall r > 0$ elég kicsire $L \cap I(r) \neq \emptyset \Rightarrow \exists z_r \in L \cap I(r)$,
$\exists z_r' \in L' \cap I(r)$.

$$\rightarrow \quad d \leq |g(z_r) - g(z_r')|$$

$$|g(z_r) - g(z_r')| = \left| \int_{z_r'}^{z_r} g'(w)\, dw \right| = \int_{\vartheta'(r)}^{\vartheta(r)} |g'(\zeta + e^{i\vartheta} \cdot r)| \, |r \cdot e^{i\vartheta}| \, d\vartheta \leq$$

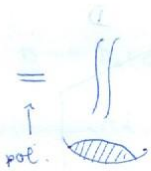
$$\leq \int_{I_r} |g'| \cdot \overbrace{r}^{\sqrt{r} \cdot \sqrt{r}} \, d\vartheta \overset{CBS}{\leq} \sqrt{\int_{I_r} |g'|^2 r \, d\vartheta} \sqrt{\int_{I_r} r \, d\vartheta} \leq$$

$$\leq \sqrt{\int_{I_r} |g'|^2 r \, d\vartheta} \cdot \sqrt{r \cdot 2\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2}{r} \leq 2\pi \int_{I_r} |g'|^2 \cdot r \cdot d\vartheta$$

Ezt lehet megfelelően kicsi r-ekre integrálni.

$$\underbrace{\int_0^{r_0} \frac{d^2}{r}\, dr}_{=\infty} \leqq 2\pi \cdot \int_0^{r_0}\int_{I_r} |g'|^2 r \, d\vartheta \, dr \underset{\text{pol.}}{=} \iint |g'|^2 \, dx\,dy =$$



$$= \lambda\left(g\left(\quad\right)\right) < \infty$$

↯ (r_0 nem túl nagy) $\square$

$\exists\ |\zeta| = 1,\ z_n \to \zeta,\ z_n \in D_1(0)$.

Az előző lemma szerint $g(z_n)$ konvergens.

$$\Rightarrow g(\zeta) := \lim_{n\to\infty} g(z_n) \in \partial D \quad \text{(kompaktság)}$$

A lemma szerint a def. értelmes és jól definiál,

A lemma okoskodása f-re is alkalmazható.

$\Rightarrow$ $g: C_1(0) \twoheadrightarrow \partial D$ 1-1 értelmű ráképzés.

$\to$ $g: \bar{D}_1(0) \to \bar{D}$, és $g: D_1(0) \to D$ homeo.

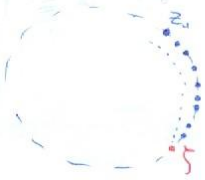
Elég megmutatni, hogy g folytonos. (vagy topológiai inclorlással, vagy az inverze végiggondolva)

$\exists\ |\zeta| = 1,\ z_n \to \zeta,\ z_n \in \bar{D}_1(0)$. $\overset{?}{\Rightarrow}$ $g(z_n) \to g(\zeta)$.

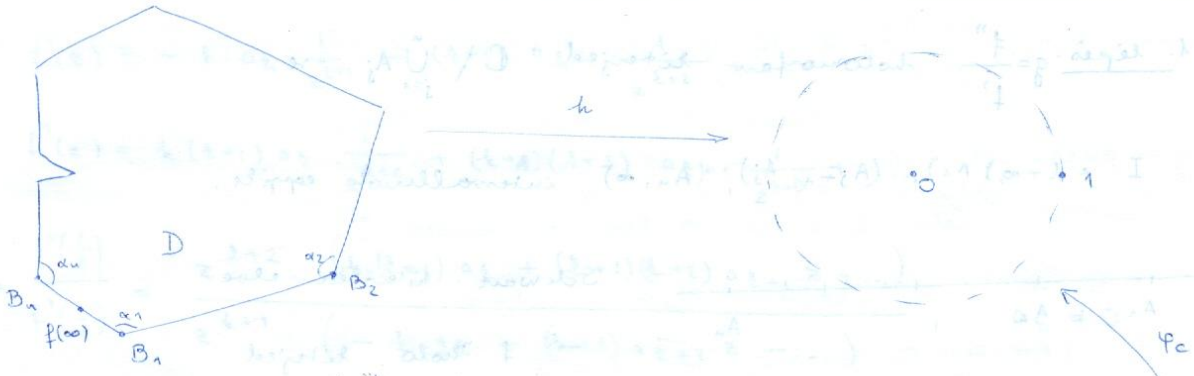
- $z_n \in D_1(0) \Rightarrow g(z_n) \to g(\zeta)$, ez jó.
- Ha $|z_n| = 1\ \forall n$. $w_n \in D_1(0)$, $|w_n - z_n| < \frac{1}{n}$, $w_n \to \zeta$, $|g(z_n) - g(w_n)| < \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow |g(z_n) - g(\zeta)| \leq \underbrace{|g(z_n) - g(w_n)|}_{< \frac{1}{n}} + \underbrace{|g(w_n) - g(\zeta)|}_{\to 0},$$

mert ugyan feltételek mellett $g(w_n) \to g(\zeta)$ $n \to \infty$



- Általános $z_n \in \bar{D}_1(0)$, $z_n \to \zeta \Rightarrow$ a fenti két eset miója. $\square$

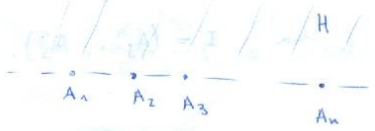


$\underbrace{\text{lő vonalas}}$

h konform, D Jordan. h kiterjed $\overline{D} \to \overline{D_1(0)}$ homeo.

Fth. 1 nem csúcspont ízpe (forgatással)

Cayley: $\varphi_c(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$, $\quad i \mapsto 0$, $\quad -i \mapsto \infty$, $\quad \infty \mapsto 1$



$\Rightarrow \varphi_c$: zárt felső félsík $\to \overline{D_1(0)}$ homeo.
$H :=$ felső félsík.

$f := h^{-1} \circ \varphi_c : H \to D$ konform, lezártak közt homeo.

Ezt szeretnénk konkrétabbat mondani, legalább formulát.

$f(\infty)$ nem csúcs, ez alapján indexeljük D csúcsait

<u>Tétel</u> (Schwarz – Christoffel-formula)

$\exists a, b \in \mathbb{C}$: $$f(z) = e^a \int_{z_0}^{z} \prod_{j=1}^{n} (\zeta - A_j)^{\frac{\alpha_j}{\pi} - 1} \, d\zeta + b,$$

ahol $z_0 \in H$ és az integrációs út tetszőleges H-beli,

valamint $(\zeta - A_j)^{\frac{\alpha_j}{\pi} - 1} = \exp\left(\left(\frac{\alpha_j}{\pi} - 1\right) \cdot \log(\zeta - A_j)\right)$, log a főérték.

Spec. eset:

$\alpha_j = \frac{\pi}{2}$, $\quad \frac{\alpha_j}{\pi} - 1 = -\frac{1}{2}$ $\quad \longrightarrow \displaystyle\int_{z_0}^{z} \frac{1}{\sqrt{(\zeta - A_1)(\zeta - A_2)(\zeta - A_3)(\zeta - A_4)}} \, d\zeta$,

nem elemi fv.

Szab. háromszögre hasonlóan, $\frac{\alpha_j}{\pi} - 1 = \frac{\pi/3}{\pi} - 1 = -\frac{2}{3}$

B: <u>1. lépés</u>. $g = \frac{f''}{f'}$ holomorfan kiterjed $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ -re.

I: a $(-\infty, A_1)$, (A_{j-1}, A_j), (A_n, ∞) intervallumok egyike.

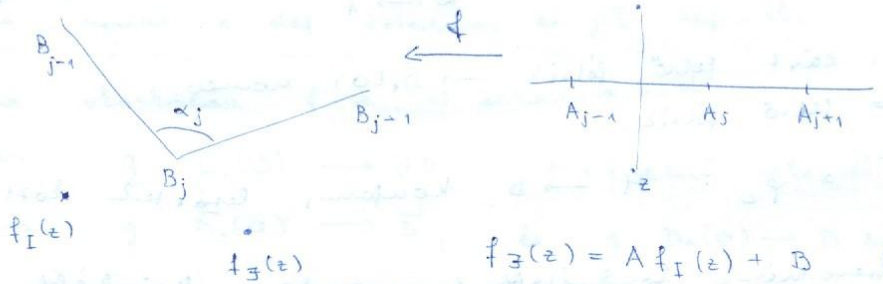
Schwarz tükrözési elve

$\Rightarrow$ f holo kiterjed

$H \cup I \cup H^*$-ra, ahol H^* az alsó fs. $\longrightarrow f_I$ fv.

A gond az, hogy f_I és f_J nem egyezik meg H^*-on.

ha $I = (A_{j-1}, A_j)$, $J = (A_j, A_{j+1})$



$f_J(z) = A f_I(z) + B \quad (A, B \in \mathbb{C})$

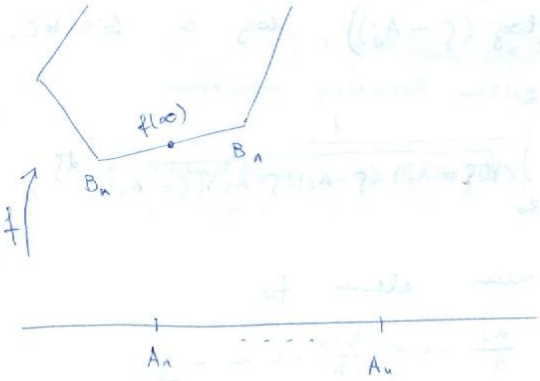
$\Rightarrow f'_J(z) = A f'_I(z)$

$\Rightarrow f''_J(z) = A f''_I(z)$

$$\longrightarrow \frac{f''_I(z)}{f'_I(z)} = \frac{f''_J(z)}{f'_J(z)}$$

✓

<u>2. lépés</u>. g-nek ∞-ben megszüntethető szingularitása van 0-val.



Egyszerű tükrözve a $(-\infty, A_1) \cup (A_n, \infty)$-re

$\longrightarrow$ f holomorf kiterjed ∞ egy kertére.

$\Rightarrow$ f-nek ∞ izo szingularitása.

$\Rightarrow$ D korlátos tartomány $\longrightarrow$

$\Rightarrow$ a ∞-beli sing. megszt. lehető f-nek.

$\Rightarrow$ a Laurent-sor: $\sum_{-\infty}^{0} a_j z^j =$

$$= a_0 + a_1 \frac{1}{z} + a_2 \frac{1}{z^2} + \ldots = \underbrace{a_k}_{\neq 0} \frac{1}{z^k} + a_{k+1} \cdot \frac{1}{z^{k+1}} + \ldots$$

$$f'(z) = -k \cdot a_k \cdot \frac{1}{z^{k+1}} - (k+1)\, a_{k+1} \cdot \frac{1}{z^{k+2}} + \dots$$

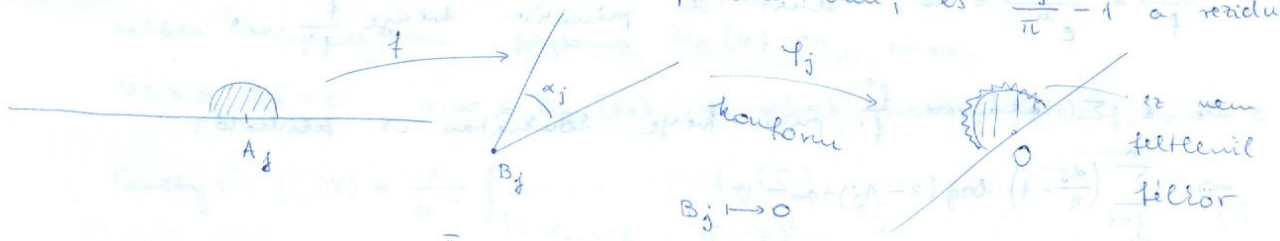
$$f''(z) = k(k+1)\, a_k \cdot \frac{1}{z^{k+2}} + (k+1)(k+2)\, a_{k+1} \cdot \frac{1}{z^{k+3}} + \dots$$

$$g\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{f''\left(\frac{1}{z}\right)}{f'\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{\cancel{z^{k+2}} \cdot \left(k(k+1)\, a_k + (k+1)(k+2)\, a_{k+1} z + \dots\right)}{\cancel{z^{k+1}} \cdot \left(-k \cdot a_k - (k+1)\, a_{k+1} z - \dots\right)}, \quad a_k \neq 0$$

0 körében a nevező nemszűnő holomorf,

a számláló 0-ban 0 $\Rightarrow g\left(\frac{1}{z}\right) \longrightarrow 0 \quad (z \to 0)$. ✓

<u>3. lépés.</u> g-nek A_j-ben elsőrendű pólusa van, és $\frac{\alpha_j}{\pi} - 1$ a reziduum.



$\varphi_j(w) = (w - B_j)^{\frac{\pi}{\alpha_j}}$ konform, ahol $\varphi_j(w) = \exp\left(\frac{\pi}{\alpha_j} \log(w - B_j)\right)$

$\varphi_j \circ f =: h_j$ $\longrightarrow$ ez kihúzással kitejed A_j egy szelete konform módon

h_j konform $\Rightarrow h_j' \neq 0$.

$$h_j' = (\varphi_j' \circ f) \cdot f' = \underbrace{(\varphi_j \circ f)}_{h_j} \cdot \frac{\pi}{\alpha_j} \frac{1}{f - B_j} \cdot f'$$

$$h_j' \frac{\alpha_j}{\pi} \cdot (f - B_j) = h_j \cdot f'$$

$$h_j'' \cdot \frac{\alpha_j}{\pi} (f - B_j) + h_j' \cdot \frac{\alpha_j}{\pi} \cdot f' = h_j' \cdot f' + h_j \cdot f''$$

$$h_j'' \frac{\alpha_j}{\pi} (f - B_j) + h_j' f' \left(\frac{\alpha_j}{\pi} - 1\right) = h_j \cdot f''$$

Hányados:

$$\underbrace{\frac{h_j''}{h_j'}}_{\text{holo. } A_j \text{ egy szelében}} + \underbrace{\frac{h_j'}{h_j}}_{\text{elsőrendű pólus, a rez. 1. (arg. elv. bronjitásából)}} \left(\frac{\alpha_j}{\pi} - 1\right) = \frac{f''}{f'} = g$$

$\Rightarrow g$ reziduuma $\left(\frac{\alpha_j}{\pi} - 1\right) \cdot 1$.

✓

4. lépés. $g(z) = \sum_{j=1} \left(\frac{\alpha_j}{\pi} - 1\right) \frac{1}{z - A_j}$

$\ell = (g - \text{RHS})$-nek nyilvánvaló vannak pólusai és nincs a residuuma.

$\Rightarrow$ ez holo $\mathbb{C}$-n és ∞-ben a limesz 0.

Liouville: ℓ korlátos egész $\to$ konst.

És ℓ ∞-ben 0 limeszű $\to$ $\ell \equiv 0$. ✓

5. lépés. $\frac{f''}{f'} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha_j}{\pi} - 1\right) \frac{1}{z - A_j}$, f konform H-n $\to$ $f' \neq 0$ H-n $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists h \in \mathcal{O}(H)$, $e^h = f'$ holomorf ág, $h = \log f$

$\Rightarrow \frac{f''}{f'} = \frac{e^h \cdot h'}{e^h} = h'$, tehát h primitíve lesz $\frac{f''}{f'}$-nek.

De a Σ alapján $\frac{f''}{f'}$ prim. lesz konkrétan is felírható:

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha_j}{\pi} - 1\right) \log(z - A_j) + a = h$

$\Rightarrow f' = e^a \cdot \pi \cdot (z - A_j)^{\frac{\alpha_j}{\pi} - 1}$

$\Rightarrow f(z) = e^a \cdot \int_{z_0}^{z} \pi \, (\zeta - A_j)^{\frac{\alpha_j}{\pi} - 1} \, d\zeta + b$

$\square$

Tétel. f-nek z_0-ban m-edrendű 0-helye van $\Rightarrow \exists$ 0-nak egy kszetén konform φ, hogy $\varphi(0) = z_0$, $f(\varphi(w)) = w^m$

B: $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, g holo z_0 egy kszetében és $\neq 0$.

$\Rightarrow g = e^{\varphi}$ alakú lokálisan

$e^{\frac{1}{m}\varphi} = H$ holomorf z_0 egy kszetében, $H^m = g$

$f(z) = (z - z_0)^m \cdot H^m = (\underbrace{(z - z_0) H}_{s(z)})^m$

s holo z_0 egy kszetében, $s(z_0) = 0$, $s'(z_0) = H(z_0) \neq 0$

$\Rightarrow z_0$ egy kszetében s konform, inverze φ

$\Rightarrow f(\varphi(w)) = s(\varphi(w))^m = w^m$

$\square$

Vitali – Montel-tétel $D \subset \mathbb{C}$ tart., $f_n \in \mathcal{O}(D)$, $|f_n| \le K$ $\forall n$ $\forall z \in D$

$\Rightarrow \exists f_{n_k}$ lok. egyenl. konvergens részsorozat.

B: Legyen $\{z_j\}_{j=1}^{\infty} \subset D$ sűrű. Minden rögz. j-re: $\{f_n(z_j)\}_{n=1}^{\infty}$-nek

Bolzano–Weierstrass miatt van konvergens részsorozata. (átlós eljárás)

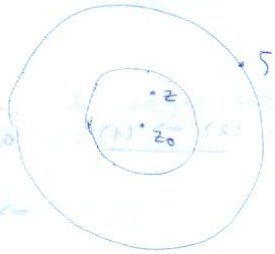
$\longrightarrow \exists n_k$, $\forall j$-re $f_{n_k}(z_j)$ konvergens

A többi tagot magunk fölöslegesen kivül, a továbbiakban tegyük fel, hogy $\{f_n(z_j)\}_{n=1}^{\infty}$ konv. $\forall j$-re. Belátjuk, hogy lok. egy. konvergens.

1) $z_0 \in D$, $R > 0$, $\overline{D}_{2R}(z_0) \subset D$. Belátjuk, hogy f_n egyenlő mértékben egyenletesen folytonos $\overline{D}_R(z_0)$-on, azaz

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $z, w \in \overline{D}_R(z_0)$, $|z-w| < \delta$ esetén $|f_n(z) - f_n(w)| < \varepsilon$.

Cauchy: $f_n'(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|\zeta - z_0| = 2R} \dfrac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta$



$$|f_n'(z)| \overset{\text{std.}}{\le} \frac{K}{R^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot (2R \cdot 2\pi) = \frac{2K}{R}$$

$z, w \in \overline{D}_R(z_0)$-ra:

$$|f_n(z) - f_n(w)| = \left| \int_w^z f_n'(\zeta)\, \zeta \right| \overset{\text{std}}{\le} |z-w| \cdot \frac{2K}{R} < \varepsilon,$$

ha $\delta = \dfrac{\varepsilon R}{2K}$.

2) f_n egyenletesen konvergens $\overline{D}_R(z_0)$-on $\left(\overline{D}_{2R}(z_0) \subset D\right)$

Egyenletesen konvergens $\Leftrightarrow$ egyenletesen Cauchy.

$\varepsilon > 0$ adott. ~~$\forall z \in \overline{D}_R(z_0)$-ra $\exists \delta_z$ (1) alapján.~~

~~A δ_z sugarú körlapok lefedik $\overline{D}_R(z_0)$-t $\Rightarrow$ véges sok is lefedi.~~

(1) szerint $\exists \delta$: $z, w \in \overline{D}_R(z)$, $|z-w| < \delta \Rightarrow |f_n(z) - f_n(w)| < \varepsilon$.

Véges sok δ-sugarú körlap lefedi $\overline{D}_R(z_0)$-t

$\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ sűrű D-ben $\Rightarrow \exists N$, $\{z_1, \dots, z_N\} \subset \overline{D}_R(z_0)$, ezen

δ sugarú körlapok mindegyikében van közülük legalább egy.

$\exists z \in \overline{D}_R(z_0)$ tetsz.

$$f_n(z) - f_m(z) = f_n(z) - f_n(z_j) + f_n(z_j) - f_m(z_j) + f_m(z_j) - f_m(z)$$

z-hez j: $|z - z_j| < \delta$

Δ-egyenlőtlenség $\Rightarrow$

$$|f_n(z) - f_m(z)| \le \underbrace{|f_n(z) - f_n(z_j)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|f_n(z_j) - f_m(z_j)|}_{<\varepsilon,\ \text{ha } n,m > n_0} + \underbrace{|f_m(z_j) - f_m(z)|}_{<\varepsilon}$$

az $\{f_n(z_j)\}$ konv. sorozatra.

$\Rightarrow$ f_n egyenletesen Cauchy $\overline{D}_R(z_0)$-on. $\square$

2016. 11. 23. <u>Általánosított Cauchy-tétel</u>. $D \subset \mathbb{C}$ tart., $\gamma \subset D$ mat. C^1, zárt. Ekvivalensek:

(1) $\gamma \sim_D 0$

(2) igaz a Cauchy-tétel: $\forall f \in \mathcal{O}(D)$: $\int_\gamma f\, dz = 0$.

(3) igaz a Cauchy-integráliformula:

$$\forall f \in \mathcal{O}(D): \quad n(\gamma, s) f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - s}\, ds. \quad (*)$$

B: <u>(2) $\Rightarrow$ (1)</u>: $a \in \mathbb{C} \setminus D$, $f(z) := \frac{1}{z-a} \in \mathcal{O}(D)$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{z-a}\, dz = 0 \Rightarrow n(\gamma, a) = 0 \Rightarrow \gamma \sim_D = 0 \checkmark$$

<u>(3) $\Rightarrow$ (2)</u>: $f \in \mathcal{O}(D)$, $\underline{\underline{s}} \in D \setminus |\gamma|$ rögz. pont, $h(z) := (z - s) f(s)$

$$(3): \quad n(\gamma, s)\, h(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h(z)}{z - s}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz. \checkmark$$

<u>(1) $\Rightarrow$ (2)</u> (1970 Dixon)

$$n(\gamma, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - s}\, dz \quad \text{(emlék)}$$

$$(*) \iff \forall w \in D \setminus |\gamma| - \text{re} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z) - f(w)}{z - w}\, dz = 0$$

(ezt korábban már láttuk)

$$g(z, w) := \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(w)}{z - w} & z \ne w \\ f'(z) & z = w \end{cases} \qquad g: D \times D \to \mathbb{C}$$

$g(\cdot, w)$ rögzített w-re holomorf D-n, ugyanígy $g(z, \cdot)$ is

Kell: $\forall w \in D$: $h(w) = \int_\gamma g(z, w)\, dz = 0$.

1. lemma. $g: D \times D \to \mathbb{C}$ folytonos.

2. lemma. $\varphi: [a,b] \times D \to \mathbb{C}$ folyt., D tart., $\forall t \in [a,b]: \varphi(t,\cdot) \in \mathcal{O}(D)$

$$\Rightarrow \Phi(z) = \int_a^b \varphi(t,z)\, dt \in \mathcal{O}(D)$$

3. lemma. χ sz. C^1 görbe $\mathbb{C}$-n, $g \in C(\chi([a,b]))$, ahol $\chi: [a,b] \to \mathbb{C}$,

$$\Rightarrow F(z) = \int_\chi \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \text{ -ra } F \in \mathcal{O}\left(\mathbb{C} \setminus \chi([a,b])\right)$$

A 3. lemma gyakorlaton (és korábban már amúgy is használhat); a másik kettőt bizonyítjuk. Előbb vissza elvégezzük (1) $\Rightarrow$ (3)-at.

$$h(w) = \int_\gamma g(z,w)\, dz = \int_a^b \underbrace{g(\gamma(t), w) \cdot \gamma'(t)}_{\varphi(t,w) \text{ folyt } ①}\, dt$$

tfh. γ C^1

② : $h \in \mathcal{O}(D)$

Ha γ csak sz. C^1 $\longrightarrow$ felbontás darabokra, h véges sok holomorf összege $\to$ holomorf.

1. lépés h kiterjed holomorf módon $\mathbb{C}$-re.

$D_1 = \{ a \in \mathbb{C} \setminus |\gamma| \mid n(\gamma, a) = 0 \} \subset \mathbb{C}$ nyílt,

$\gamma \sim_D 0 \Rightarrow D_1 \supset \mathbb{C} \setminus D$

$D_1 \supset (\mathbb{C} \setminus |\gamma|)_\infty$, ahol $(\cdot)_\infty$ a nem korlátos komponens.

$\Rightarrow D_1 \cup D = \mathbb{C}$

③ $\to h_1(w) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\, dz$, $h_1 \in \mathcal{O}(D_1)$, mert $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$-n is.

All. $w \in D \cap D_1 \Rightarrow h(w) = h_1(w)$

Ugyanis: $w \notin |\gamma| \Rightarrow h(w) = \int_\gamma \frac{f(z) - f(w)}{z - w}\, dz =$

$$= \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\, dz - f(w) \underbrace{\int_\gamma \frac{1}{z-w}\, dz}_{0} = h_1(w) \quad ✓$$

$$H(w) := \begin{cases} h(w) & w \in D \\ h_1(w) & w \in D_1 \end{cases}$$

Ez egy jóldefiniált kiterjesztés, mindkét részben holo. $\Rightarrow$ $\mathbb{C}$-n is.

2. lépés: $H \equiv 0$ (ez igazolná a tételt).

Ha $|w|$ nagy $\Rightarrow w \in (\mathbb{C} \setminus |\gamma|)_\infty$

$$\Rightarrow H(w) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz \Rightarrow |H(w)| \overset{\text{std.}}{\leq} \left(\max_{z\in\gamma} |f(z)|\right) \cdot \frac{L(\gamma)}{\text{táv}(\gamma, w)} \to 0,$$

midőn $w \to \infty$.

Egészfüggvény, limesz ∞-ben $0 \Rightarrow$ Liouville miatt áll., és csak 0 lehet. $\Rightarrow H \equiv 0$. ✓

Most ellenőrizzük a két lemmát.

2. lemma: Valós paraméteres integrál-tétel $\Rightarrow \Phi \in C(D)$.

Legyen $\Delta \subset D$.

$$\int_{\partial\Delta} \Phi(z)\,dz = \int_{\partial\Delta} \left(\int_a^b \varphi(t,z)\,dt \right) dz =$$

Fubini

$$= \int_a^b \left(\underbrace{\int_{\partial\Delta} \varphi(t,z)\,dz}_{} \right) dt =$$

Goursat

$$= \int_a^b 0\,dt = 0$$

Morera $\Rightarrow \Phi \in \mathcal{O}(D)$. ✓

1. lemma: $\dfrac{f(z)-f(w)}{z-w} = g(z,w)$, ha $z \neq w$.

$\Rightarrow D \times D$-ben az átló kivételével folytonosan kiterjeszthető, tehát folytonos.

Ami még kell: $a \in D$-re (a,a)-beli folytonosság.

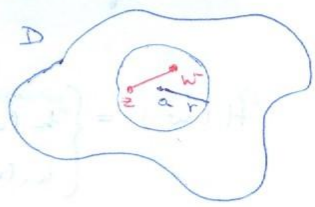
$z, w \in D$-re $g(z,w) - g(a,a)$ vizsgálata kell. Eszerint:

- Tfh. $z = w \in D$: $g(z,z) - g(a,a) = f'(z) - f'(a)$.

  $f' \in \mathcal{O}(D)$ miatt $|z-a| < \delta \Rightarrow |f'(z) - f'(a)| < \varepsilon$. (adott)

- Ha $z \neq w \in D$:

$$g(z,w) - g(a,a) = \frac{f(z)-f(w)}{z-w} - \overbrace{g(a,a)}^{f'(a)} =$$



$$= \frac{1}{z-w} \int_w^z f'(\zeta) - f'(a)\,d\zeta$$

$$|g(z,w) - g(a,a)| \overset{\text{std.}}{\leq} \frac{1}{\cancel{|z-w|}} \cdot \cancel{|z-w|} \cdot \max_{[w,z]} |f'(\zeta) - f'(a)| < \varepsilon,$$

ha r elég kicsiny. ✓ □

Egész függvények

Tétel (Szubordináció elve) $g, G : D_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorf, $g(0) = G(0) = 0$,

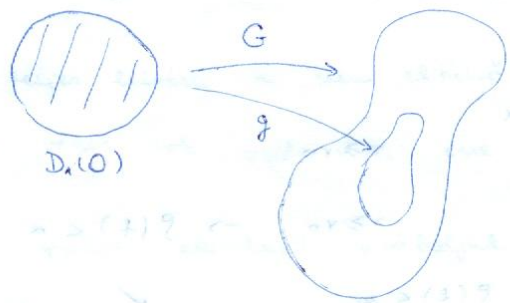
G konform $D_1(0)$-n $G(D_1(0))$-ra.* $\Rightarrow \forall\, 0 < r < 1$:

$$g(D_r(0)) \subset G(D_r(0)).$$

*és $g(D_1(0)) \subset G(D_1(0))$

(Ez is a Schwarz-lemma általánosítása.)

B:



$S(z) := G^{-1}(g(z))$

$S \in \mathcal{O}(D_1(0))$,

$D_1(0)$-t önmagára képezi,

$S(0) = 0$

Schwarz $\Rightarrow$ $S(D_r(0)) \subset D_r(0)$

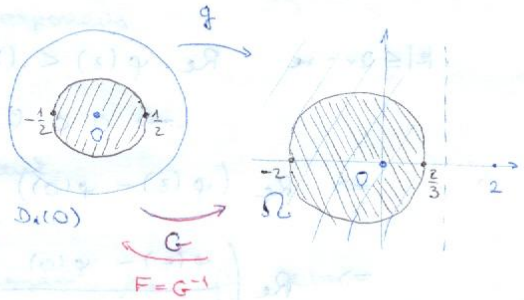
$\Rightarrow \underbrace{(G \circ S)}_{g}(D_r(0)) \subset G(D_r(0))$

$\square$

Áll. (spec. eset) $g : D_1(0) \to \{z \mid \operatorname{Re} z < 1\}$ holomorf, $g(0) = 0$.

$\Rightarrow$ $|z| < \frac{1}{2}$-re $|g(z)| \leqq 2$.

B: $\Omega = \{z \mid \operatorname{Re} z < 1\}$



F: $0 \mapsto 0$, $2 \mapsto \infty$ (kiterjesztés)

$F(w) = \dfrac{w}{w-2}$ jó

$G = F^{-1} \longrightarrow G(z) = \dfrac{2z}{z-1}$

G valósan valós; $[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$-en értékkészlet: $[-2, \frac{2}{3}]$

$D_{1/2}(0) \xrightarrow{G} [-2, 2/3]$ fölé emelt szelet.

A tétel miatt $|g(z)| < 2$.

$\square$

Def. $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $(\inf \emptyset = +\infty)$: $\rho(f) = \inf\{\alpha \geq 0 \;\; M(r, f) < e^{r^\alpha}, \text{ ha } r \geq r_0\}$,

az f rendje.

Példa. exp rendje: $\rho(e^z) = 1$

Polinom rendje: 0, bármely $\alpha > 0$ jó

$\rho(\sin) = 1$, $\rho(e^{z^2}) = 2$, $\rho(e^{e^z}) = +\infty$

Tétel. $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $f \neq 0$ $\Rightarrow$ $\rho(f) < \infty \Leftrightarrow f = e^{\varphi(z)}$, ahol

$\varphi \in \mathbb{C}[z]$ és $\deg \varphi = \rho(f)$.

B: $f \neq 0 \Rightarrow \exists \varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $f = e^{\varphi}$

„$\Leftarrow$" Ha $\varphi \in \mathbb{C}[z]$: belátjuk, hogy $\rho(f) \leq \deg \varphi$.

$\varphi(z) = a_m z^m + \dots + a_0$

$\alpha > m \Rightarrow |\varphi(z)| < r^{\alpha}$, ha $|z| = r$ vmely $r \geq r_0$-ra.

(polinom növekedése)

$$\left|e^{\varphi(z)}\right| = e^{\operatorname{Re}\varphi(z)} < e^{r^{\alpha}} \qquad r \geq r_0.$$

$$\Rightarrow M(r, f) < e^{r^{\alpha}} \qquad r \geq r_0 \Rightarrow \rho(f) < \alpha$$

$\forall \alpha > m$-re igaz $\Rightarrow \rho(f) \leq m$. ✓

„$\Rightarrow$" $\rho(f) < \infty$. Belátjuk, hogy $\varphi \in \mathbb{C}[z]$ és $\deg \varphi \leq \rho(f)$. (Ez már elég.)

$\rho(f) < \alpha$ tehát.

$M(r, f) < e^{r^{\alpha}}$ $\quad r \geq r_0$

$$\underset{|z| = r}{e^{\operatorname{Re}\varphi(z)} < e^{r^{\alpha}}} \iff \operatorname{Re}\varphi(z) < r^{\alpha} \quad (r \geq r_0)$$

$|z| \leq 2r$-re $\quad \operatorname{Re}\varphi(z) < (2r)^{\alpha}$, $\quad \operatorname{Re}\varphi(0) < (2r)^{\alpha}$,

$$\Rightarrow 0 < (2r)^{\alpha} - \operatorname{Re}\varphi(0)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left(\varphi(z) - \varphi(0)\right) < (2r)^{\alpha} - \operatorname{Re}\varphi(0)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{\varphi(z) - \varphi(0)}{(2r)^{\alpha} - \operatorname{Re}\varphi(0)}\right) < 1$$

Az előző állításra megy ki, de míg vissza kell szálászni.

$|w| < 1$-re $\quad z = 2r \cdot w$

$$g(w) := \frac{\varphi(2rw) - \varphi(0)}{(2r)^{\alpha} - \operatorname{Re}\varphi(0)}, \quad g: D_1(0) \to \{\operatorname{Re} z < 1\}$$

holomorf,

$g(0) = 0$. Hatnáljuk az előző állítást.

$$\Longrightarrow |w| \leq \tfrac{1}{2}\text{-re} \quad g(w) \leq 2$$

$$\Longrightarrow |z| \leq r\text{-re} \quad \left|\frac{\varphi(z) - \varphi(0)}{(2r)^{\alpha} - \operatorname{Re}\varphi(0)}\right| < 2$$

$$\Rightarrow \quad |\varphi(z)| \le 2\cdot(2r)^{\alpha} - \operatorname{Re}\varphi(0) + |\varphi(0)| \le$$

$$\le 2^{1+\alpha}\cdot r^{\alpha} + 3\,|\varphi(0)| <$$

$\varepsilon > 0$ tetsz.-re: $< r^{\alpha+\varepsilon}$, ha $r \ge r_1 \ge r_0$

$\Rightarrow$ φ polinom és $\deg\varphi < \alpha+\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$ $\Rightarrow$ $\deg\varphi < \alpha$

α tetszőleges $\Rightarrow$ $\deg\varphi \le \rho(f)$. ✓

Ez egy teljes leírása a nem eltűnő véges rendűeknek.

Ha csak véges sok gyök van, ezt visszavesszük mint egy polinom.

Most a gyökök eloszlását próbáljuk mérni.

„Mindenféle függvénytől függetlenül tegyük fel, hogy..."

$z_k \in \mathbb{C}$, nem torlódik $\mathbb{C}$-ben.

$$n(r) = \#\{z_k : |z_k| \le r\}$$

$$\mu = \inf\{\beta \ge 0 : \exists r_0 : \forall r \ge r_0 : n(r) \le r^{\beta}\}$$

$$\mu_* = \inf\left\{\gamma \ge 0 : \sum_{z_k \ne 0} \frac{1}{|z_k|^{\gamma}} < \infty\right\}$$

<u>Tétel.</u> $\mu = \mu_*$ az ún. konvergencia exponens.

(<u>Tétel.</u> $\mu(f) \le \rho(f)$.)

B: A gyávák módszerét alkalmazzuk. 2016. 11. 28

<u>$\mu \le \mu_*$</u>: Ha $\mu_* = \infty$ $\longrightarrow$ ✓

Ha $\mu_* < \infty$ $\longrightarrow$ legyen $\mu_* < \beta$ tetsz.

$$\underbrace{\sum_{z_k \ne 0} \frac{1}{|z_k|^{\beta}} < \infty}_{\text{VII}} \qquad 0 < |z_k| \le r \Rightarrow \frac{1}{r^{\beta}} \le \frac{1}{|z_k|^{\beta}}$$

$$\sum_{0<|z_k|\le r} \frac{1}{|z_k|^{\beta}} \ge (n(r) - c_0)\frac{1}{r^{\beta}}, \quad \text{ahol } c_0 = \#\{k : z_k = 0\}$$

$$\Rightarrow n(r) \le r^{\beta}\cdot C + C_0 < r^{\beta+\varepsilon}, \quad \text{ha } r \ge r_1$$

$\varepsilon > 0$-ra

$$\Rightarrow \mu \le \beta + \varepsilon \Rightarrow \mu \le \beta \Rightarrow \mu \le \mu_*. \quad ✓$$

$\underline{\mu_* \le \mu}$ Ha $\mu = \infty \longrightarrow$ ✓. Fth. $\mu \neq \infty$.

Legyen $\gamma > \mu$ tetsz., legyen $\mu < \gamma < \beta$.

$$\sum_{\substack{z_k \neq 0 \\ |z_k| > 1}} \frac{1}{|z_k|^\beta} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{2^j < |z_k| \le 2^{j+1}} \frac{1}{|z_k|^\beta} = c_0 + \sum_{\substack{2^j < |z_k| < 2^{j+1} \\ r_0 \le 2^j}} \frac{1}{|z_k|^\beta} \le$$

↳ csak véges sokat hagyunk el

Ha $r \ge r_0 \longrightarrow n(r) \lneq r^\gamma$

$$\le c_0 + \sum_{j \ge j_0} \frac{n(2^{j+1})}{(2^j)^\beta} < c_0 + \sum_{j \ge j_0} \frac{(2^{j+1})^\gamma}{(2^j)^\beta} =$$

$$= c_0 + \underbrace{\sum_{j \ge j_0} 2^\gamma \cdot \big(\underbrace{2^{\gamma-\beta}}_{<1}\big)^j}_{\text{geo. sor farokösszege}} < \infty$$

$\Longrightarrow \mu_* < \beta \quad \forall \beta \Rightarrow \mu_* \le \gamma \quad \forall \gamma \Rightarrow \mu_* \le \mu.$ □

<u>Tétel.</u> $0 \neq f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \Rightarrow \mu(f) \le \rho(f)$.

B: <u>Lemma</u> (gyökszámbecslés). $g \in \mathcal{O}(D_1(0))$, $g \in C(\overline{D_1}(0))$, $g(0) \neq 0$; $g|_{C_1(0)} \le 1$

$n = \overline{D_{1/2}}(0)$-ba eső gyökök száma $\Rightarrow n \le \dfrac{\log \frac{1}{|g(0)|}}{\log 2}$.

B: $z_1, \dots, z_n$ a gyökök.

$\dfrac{z - z_j}{1 - \overline{z_j} z}$ automorfizmusok, $h(z) = \dfrac{g(z)}{\prod_{j=1}^{n} \frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j} z}}$

↓

konstanson 1 abs. érték

$|h(z)| = 1 \quad (|z| = 1) \Rightarrow$ max. elv.: $|h(0)| \le 1$

$$\Rightarrow |h(0)| = \frac{|g(0)|}{\prod_{j=1}^{n} |z_j|} \le 1, \quad \forall j\text{-re } 0 < |z_j| < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad |g(0)| \cdot 2^n \leq |h(0)| = \frac{|g(0)|}{\prod |z_j|} \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad n \log 2 + \log |g(0)| \leq 0.$$ Az állítás következik. $\boxed{L}$

FHH. $\rho(f) < \infty$. Legyen $\rho < \alpha$ tetsz.

$\exists r_0$: $\forall r \geq r_0$ esetén $M(r, f) < e^{r^\alpha} \Rightarrow M(2r, f) < e^{(2r)^\alpha}$

Sorfejtés:

$$f(z) = a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \dots, \quad a_m \neq 0.$$

$$g(w) = \frac{f(2rw)}{M(2r, f) \cdot w^m},$$ ezre lemma

$|w| \leq 1$

$2rw = z$

szerepcsere

ettől nem lesz gyök 0-ban

$n(r) = g$-nek $\overline{D}_{1/2}(0)$-ban eső gyökei $+ m$

$$\Rightarrow \quad n(r) \leq m + \frac{\log \frac{1}{|g(0)|}}{\log 2}$$

$$f(2rw) = a_m (2r)^m w^m + a_{m+1} (2r)^{m+1} w^{m+1} + \dots$$

$$g(0) = \frac{a_m \cdot (2r)^m}{M(2r, f)} \quad \Rightarrow \quad n(r) \leq \frac{\log \frac{1}{|g(0)|}}{\log 2} = m + \frac{\log M(2r, f) - \log |a_m| - m \log 2r}{\log 2}$$

$$< m + \frac{(2r)^\alpha - \log |a_m| - m \log(2r)}{\log 2} < r^{\alpha + \varepsilon}$$ $\varepsilon > 0$ tetsz $\exists r_1$: $\forall r \geq r_1$

$$\Rightarrow \quad \mu(f) \leq \alpha + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \mu(f) \leq \alpha \quad \forall \alpha \quad \Rightarrow \mu(f) \leq \rho(f)$$ $\square$

2016. 12. 05.

Mittag-Leffler-feladat

$\{z_k\}$ véges vagy végtelen, nem torlódó pontsorozat. $\mathbb{C}$-ben (különböző ℓ)

F_k főrész z_k-hoz, $F_k(z) = \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{a_{k,j}}{(z-z_\ell)^j} = H\left(\frac{1}{z-z_\ell}\right)$,

$$H(w) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{k,-j} \cdot w^j \in \mathcal{O}(\mathbb{C}).$$

Feladat: $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots\})$ keresése, hogy f-nek z_ℓ-ben F_k a szinguláris része.

Ha csak véges sok pont van: $F_1 + \dots + F_N = f$ jó.

Ha végtelen sok van: $\sum F_\ell(z)$ nem feltétlenül konvergens.

pl. $z_k = k$, $F_k = \frac{1}{z-k}$ $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z-\ell}$ pl. $z=0$-ban divergens.

Tétel (ML): A ML-feladat mindig megoldható.

Ha f megoldás és $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, akkor $f+h$ is megoldás és más megoldás nincs.

B (Weierstrass): Ha f mo. és $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, akkor $h+f$ nyilván megoldás. Megfordítva, ha f_1 és f_2 megoldások, akkor $f_1 - f_2$-nek $\forall z_\ell$-ben megsz. singularitása van, máskülönben holomorf $\Rightarrow f_1 - f_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. ✓

Ötlet: az összeget bővítjük úgy, hogy a főrészek megmaradjanak, és konvergenssé váljon. Ez jó, ha holomorfokat adunk hozzá:

$$\sum_k \left(F_\ell(z) - P_\ell(z)\right) \text{ alakú, ahol } P_\ell \in \mathbb{C}[z]$$

Fth. $z_\ell \neq 0$, ui. ha $z_0 = 0$, akkor azt ignoráljuk, megoldjuk a feladatot a többi pontra $\rightsquigarrow g$,

$f := F_0 + g$ jó lesz.

Legyen $z_k \neq 0$ adott. $\Rightarrow$ F_k holomorf $D_{|z_k|}(0)$-n

$\Rightarrow$ hsorba fejthető, $\overline{D}_{\frac{|z_k|}{2}}(0)$-n a konvergencia egyenletes.

Elég hosszú részösszeg $=: P_k$ polinom.

$$z \in \overline{D}_{\frac{|z_k|}{2}}(0) \text{-ra} \quad \left| F_k(z) - P_k(z) \right| \leq \frac{1}{2^k}$$

Állítjuk, hogy ez jó lesz.

Legyen $R > 0$ adott. Belátjuk, hogy $D_R(0)$-ban ez a megoldás.

$|z| < R$:
$$\underbrace{\sum_{\substack{k \\ |z_k| < 2R}} \left(F_k(z) - P_k(z) \right)}_{\substack{\text{véges összeg} \\ \text{(mert } z_k \text{ nem torlódik)}}} + \underbrace{\sum_{\substack{k \\ |z_k| \geq 2R}} \left(F_k(z) - P_k(z) \right)}_{\substack{\text{egyenletesen konvergens és} \\ \forall \text{ tag holomorf } D_R(0)\text{-ban,}}} \quad \circledast$$

ui. $|z| < R \leq \frac{|z_k|}{2} \Rightarrow \left| F_k(z) - P_k(z) \right| \leq \frac{1}{2^k}$,

a Weierstrass-kritérium miatt $\sum_{\substack{k \\ |z_k| \geq 2R}} \left(F_k(z) - P_k(z) \right)$ e.konv $D_R(0)$-n,

hiszen $\sum \frac{1}{2^k} < \infty$

Tehát ez valóban megfelelő. $\square$

Mj. A lényeg nem az $\frac{1}{2^k}$, hanem az, hogy P_k-t úgy választottuk, hogy $\circledast$ e.konvergens $\forall\, 0 < R$-re $D_R(0)$-n.

Weierstrass-feladat.

z_k véges vagy végtelen pontsorozat $\mathbb{C}$-ben, nem torlódik, különböző.

$\forall k$-ra adott $m_k \in \mathbb{N}$.

Keressünk olyan $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$-t, amiben pontosan z_k-ban vannak a gyökei, és a multiplicitás m_k.

<u>Tétel</u>. A Weierstrass-feladat mindig megoldható.

Ha π mo., $g \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C}) = \mathcal{O}(\mathbb{C}) \cap \{h : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid h \neq 0\}$

$\to \pi \cdot g$ is mo.

Ha π_1, π_2 mo. $\Rightarrow \exists g \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C})$: $\pi_2 = g\pi_1$.

<u>1. következmény</u>. z_k n.f., $\forall k$-ra adott $m_k \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists h \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$: h-nak pontosan ezen pontokban van gyöke ill. pólusa a megfelelő multiplicitással/rendben.

($m_k > 0$-ra gyök, $m_k < 0$-ra pólus)

B: $A := \{z_k \mid m_k \geq 0\}$, $B := \{z_k \mid m_k < 0\}$.

A-ra megoldjuk a W-feladatot $\to$ f mo.

B-re megoldjuk a W-feladatot $(-m_k)$-val $\to$ g mo.

$h = \frac{f}{g}$ jó. $\square$

<u>2. következmény</u>. Minden $h \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ ilyen alakú: $h = \frac{f}{g}$, ahol $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ és $g \not\equiv 0$.

B: $P := \{z_k \in \mathbb{C} \mid z_k$ pólusa h-nak$\}$ nem torlódó,

m_k a pólusok rendjei

$\to$ W-feladat megoldása ezek g.

$f = g \cdot h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, az állítás adódik. $\square$

3. következmény. (interpolációs feladat) z_k m. f., $\forall k$-ra $a_k \in \mathbb{C}$ adott.

$\Rightarrow \exists f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$: $f(z_k) = a_k \quad \forall k$

B: Legyen $m_k = 1$ és oldjuk meg a W-feladatot. $\longrightarrow$ $h(z)$ mo.,

z_k elsőrendű gyök, $h'(z_k) \neq 0$ (mert 1 a mult.)

$F_k := \dfrac{\lambda_k}{z - z_k}$, ennek ML-feladat $\longrightarrow$ $g(z)$ mo.

$f(z) = \underbrace{g(z) \cdot h(z)}_{\in \mathcal{O}(\mathbb{C})}$. A reziduumokat majd úgy választjuk meg, hogy a_k stimmeljen.

z_k körül $h(z) = \overbrace{h(z_k)}^{0} + h'(z_k)(z - z_k) + \frac{1}{2} h''(z_k) \cdot (z - z_k)^2$

$$g(z) = \frac{\lambda_k}{z - z_k} + \text{holomorf}$$

$$\Rightarrow (gh)(z) = \lambda_k \cdot h'(z_k) + (z - z_k) \cdot (\text{holomorf})$$

$$\Rightarrow f(z_k) = \lambda_k \cdot h'(z_k) = a_k \longrightarrow \lambda_k := \frac{a_k}{h'(z_k)}$$

$\square$

B_T: Ha π megoldás, $g \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C}) \Rightarrow \pi g$ is mo. ✓

(Mj. $g = e^{\varphi(z)}$ alakú, ahol $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$)

Ha π_1, π_2 mo.: $\Rightarrow \dfrac{\pi_2}{\pi_1}$ $\forall$ singularitása szüntethető $\Rightarrow g = \dfrac{\pi_2}{\pi_1} \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C})$. ✓

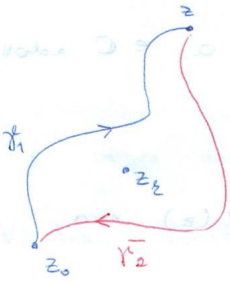
Tfh. π mo. Emlék: $\dfrac{\pi'}{\pi}$-nek $\forall z_k$-ban elsőrendű pólusa van m_k reziduummal, z_k-ban a főrész: $\dfrac{m_k}{z - z_k} =: F_k$. A ML-feladat megoldható: h mo.

$$\frac{\pi'}{\pi} = h \longrightarrow \pi = ?$$

$(\log \pi)' = \dfrac{\pi'}{\pi}$ (lokálisan értelmes a log)

$\Rightarrow \pi(z) = \exp \int_{z_0}^{z} h(\xi)\, d\xi$, ahol $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, \} = D$,

és γ szak. C^1 görbe D-ben, γ: $z_0 \in D$-ből z-be vis.



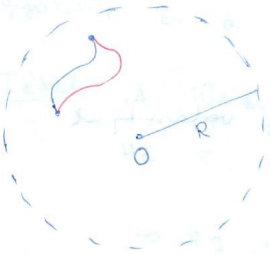
Be kell látni: jóldef. és megoldja a W-feladatot.

1. lépés: jóldefiniáltság.

Tfh. γ_1, γ_2 ilyen görbék.

$\gamma := \gamma_1 + \overline{\gamma_2}$ zárt sak C^1 görbe D-ben.

Legyen $R > 0$: $D_R(0) \supset \gamma$.



$\{z_k\}$-ból csak véges sok esik $D_R(0)$-ba.

Alkalmazható a reziduumtétel h, $D_R(0)$, γ-ra:

$$\int_\gamma h(\xi)\,d\xi = 2\pi i \sum_{\substack{j \\ z_j \in D_R(0)}} \underbrace{n(\gamma, z_j)}_{\in \mathbb{Z}} \cdot \underbrace{\operatorname{Res}_{z_j} h}_{m_j \in \mathbb{N}} \Bigg\} \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow e^{\int_\gamma h(\xi)\,d\xi} = 1.$$

$$\| $$

$$e^{\int_{\gamma_1} h(\xi)\,d\xi - \int_{\gamma_2} h(\xi)\,d\xi} \Rightarrow e^{\int_{\gamma_1} h(\xi)\,d\xi} = e^{\int_{\gamma_2} h(\xi)\,d\xi}$$

$\Rightarrow \pi$ jóldefiniált. ✓

2. lépés. $\pi \in \mathcal{O}^*(D)$

Ugyanis $\int_{z_0}^{z} h(\xi)\,d\xi$ lok. prim. fvénye h-nak $\to$ holomorf.

Exponenciálisban $\to \neq 0$. ✓

3. lépés. z_k egy kezében vald viselkedés.

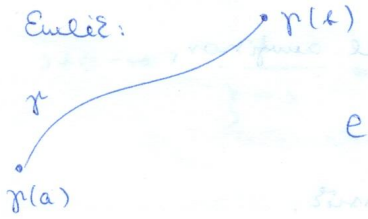
z_{k_0} rögzített.

$$\pi(z) = \underbrace{\exp\left(\int_{z_0}^{z} h(\xi) - \frac{m_{k_0}}{\xi - z_{k_0}}\,d\xi\right.}_{\substack{\text{holomorf és } \neq 0 \\ z_{k_0} \text{ egy kezében}}} \left. + \int_{z_0}^{z} \frac{m_{k_0}}{\xi - z_{k_0}}\,d\xi\right)$$

$$e^{\int_{z_0}^{z} \frac{m_{k_0}}{\xi - z_{k_0}}\,d\xi} = \left(e^{\int_{z_0}^{z} \frac{1}{\xi - z_{k_0}}\,d\xi}\right)^{m_{k_0}} \overset{(*)}{=} \left(\frac{z - z_{k_0}}{z_0 - z_{k_0}}\right)^{m_k}$$

$\Rightarrow m_{k_0}$-adrendű zérushelye van π-nek z_{k_0}-ban. □

Emlék:



$$e^{\int_{\gamma(a)}^{\gamma(t)} \frac{1}{\xi - s}\, d\xi} \quad (*) \quad = \frac{\gamma(t) - s}{\gamma(a) - s},$$

ezt az indexnél számoltuk ki.

Intuitive: $e^{\int_{z_0}^{z} \frac{1}{\xi - z_{k_0}}\, d\xi} = e^{\log(z - z_{k_0}) - \log(z_0 - z_{k_0})}$

<u>Euler</u>: ha z_j a polinom gyökei: $p(z) = c \cdot \prod (z - z_j)$.

Ha $\forall z_j \neq 0$: $p(z) = p(0) \cdot \prod_j \left(1 - \frac{z}{z_j}\right)$

Miért ne lehetne minderre végtelen esetben is?

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = 1 \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

Végtelen szorzat: $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$, $a_j \in \mathbb{C}$ konvergens: $\prod a_j \to A$.

Gond: véges sok tag megváltoztatása beleszólja a konvergenciát: 0-t lehet oriálni.

Gond: szorzat tud úgy 0 lenni, hogy egyetlen tényező sem 0: $a_j = \frac{1}{2}$-re pl.

$\Rightarrow$ nem ez a definíció.

<u>Def.</u> $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergens, ha $\exists k_0: \forall j \geq k_0: a_j \neq 0$, és

$\prod_{j=k_0}^{k} a_j = b_k \to A \neq 0$. Ekkor $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$ értéke $A \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{k_0 - 1}$

<u>Áll.</u> $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergens $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} a_j \to 1$.

B: $\left.\begin{array}{l} b_{k+1} = b_k \cdot a_{k+1} \\ \downarrow \qquad \downarrow \\ A \neq 0 \qquad A \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a_{k+1} \to 1.$

$\not\Leftarrow$ Ellenpélda: $a_j = 1 - \frac{1}{j}$ $(j \geq 2)$ $\quad a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_N = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{N-1}{N} = \frac{1}{N} \to 0.$

$\square$

$\{z_k\}$ nem torlódik $\mathbb{C}$-ben, minden pontot annyiszor, amennyi a multiplicitása, $\forall z_k \neq 0$

A W-feladat megoldásának mostat alakját keressük.

$\prod (z - z_j)$ nem jó, ∞-be torló tényezők.

$\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_j}\right)$ se mindig konvergál, pl. $z_j = j$: $\prod \left(1 - \frac{z}{j}\right)$, $z=1$-ben div.

De: $\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_j}\right) e^{\frac{z}{j}}$ már jó lesz. (Weierstrass)

$$|\xi| < 1. \quad \to \quad 1 - \xi = e^{\log(1-\xi)} = e^{-\left(\xi + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3} + \dots\right)} =$$

$$= e^{-\left(\xi + \frac{\xi^2}{2} + \dots + \frac{\xi^n}{n} + \frac{\xi^{n+1}}{n+1} + \dots\right)}$$

$$\to \underbrace{(1-\xi) \cdot e^{\xi + \frac{\xi^2}{2} + \dots + \frac{\xi^n}{n}}}_{E_n(\xi)} = e^{-\left(\frac{\xi^{n+1}}{n+1} + \dots\right)}$$

<u>Tétel</u>: (Weierstrass-megoldás mostatalakja, kanonikus mostat)

$\forall \{z_k\}$ $\exists n_k$ sorozat, hogy $\underbrace{\prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k}\left(\frac{z}{z_k}\right)}_{\pi(z)}$ megoldja a Weierstrass-feladatot.

Ha $\mu = \mu^* < \infty$ $\Rightarrow$ $n_k = n$ jó választás $\forall k$, ahol

$$n = \min\left\{ l \geq 0 \;\middle|\; l \in \mathbb{Z},\ \sum \frac{1}{|z_k|^{l+1}} < \infty \right\} \qquad (\mu = \mu^* < \infty \text{ miatt } \exists).$$

Ezzel az n_k-val felírt alak a kan. mostat.

B:

$h = \frac{\pi'}{\pi}$ a ML-feladat megoldása

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - z_k} - P_k(z) \right), \quad \text{ahol } \forall R > 0:$$

$$\sum_{|z_k| \geq 2R} \frac{1}{z - z_k} - P_k(z) \quad \text{egyenletesen konvergens } \overline{D_R(0)}\text{-n}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi(z) = \exp \int_{z_0}^{z} \sum_k \left(\frac{1}{\xi - z_k} - P_k(\xi) \right) d\xi = \exp \sum_k \int_0^z \left(\frac{1}{\xi - z_k} - P_k(\xi) \right) d\xi =$$

$|z| < R$

$\gamma \subset D_R(0)$

$z_0 := 0$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \exp \int_0^z \left(\frac{1}{\xi - z_k} - P_k(\xi) \right) d\xi$$

$s \neq 0$-ra $\quad \dfrac{1}{\xi - s} = \dfrac{-1}{s} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{\xi}{s}}$. $\quad \left|\dfrac{\xi}{s}\right| < 1$-re geo. sor:

$$= \frac{-1}{s} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\xi}{s}\right)^j,$$ ennek vesszük egy részösszeletét.

$$= \frac{-1}{s} \cdot \left(1 + \frac{\xi}{s} + \frac{\xi^2}{s^2} + \dots + \left(\frac{\xi}{s}\right)^n + \dots\right)$$

$s = z_k$-ra: $\quad P_k(z) = \dfrac{-1}{z_k} \cdot \left(1 + \dfrac{z}{z_k} + \left(\dfrac{z}{z_k}\right)^2 + \dots + \left(\dfrac{z}{z_k}\right)^{n_k - 1}\right)$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \exp \int_0^z \left(\frac{1}{\xi - z_k} - P_k(\xi)\right) d\xi = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z - z_k}{0 - z_k} \cdot \exp\left(-\int_0^z P_k(\xi)\, d\xi\right)\right) =$$

$$-P_k(z) = \frac{1}{z_k} + \frac{z}{z_k^2} + \frac{z^2}{z_k^3} + \dots + \frac{z^{n_k - 1}}{z_k^{n_k}}$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{z - z_k}{0 - z_k}}_{\left(1 - \frac{z}{z_k}\right)} \cdot e^{\frac{z}{z_k} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z}{z_k}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{z_k}\right)^3 + \dots + \frac{1}{n_k} \cdot \left(\frac{z}{z_k}\right)^{n_k}}$$

$$\frac{1}{z - z_k} \cdot P_k(z) = \frac{-1}{z_k}\left(\left(\frac{z}{z_k}\right)^{n_k} + \left(\frac{z}{z_k}\right)^{n_k + 1} + \dots\right) = \frac{-1}{z_k} \cdot \left(\frac{z}{z_k}\right)^{n_k} \left(\frac{1}{1 - \frac{z}{z_k}}\right) =$$

$$= \frac{z^{n_k}}{z_k^{n_k}} \cdot \frac{1}{z - z_k}$$

$$\left.\begin{array}{l} |z| \leq R \leq \dfrac{|z_k|}{2} \\ 2R \leq |z_k| \end{array} \Longrightarrow |z - z_k| \geq \frac{|z_k|}{2}\right\} \Longrightarrow \left|\frac{1}{z - z_k} - P_k(z)\right| = \frac{|z|^{n_k}}{|z_k|^{n_k}} \cdot \frac{1}{|z - z_k|} \leq$$

$$\leq \frac{R^{n_k} \cdot 2}{|z_k|^{n_k + 1}} \underset{n_k = n}{=} \frac{2R^n}{|z_k|^{n+1}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sum_{|z_k| \geq 2R} \left(\frac{1}{z - z_k} - P_k(z)\right)$$ egy. konvergens $D_R(0)$-n W-kritérium miatt. ✓ □

Mj. μ és n kapcsolata: $\quad [\mu] = n$, ha $\mu \notin \mathbb{Z}$

$\mu - 1 = n$, ha $\mu \in \mathbb{Z}$ és $\sum \dfrac{1}{|z_k|^\mu} < \infty$

$\mu = n$, ha $\mu \in \mathbb{Z}$ és $\sum \dfrac{1}{|z_k|^\mu} = \infty$

(pl. harmonikus sor: $z_k = k$.

$n = 0$ nem jó, csak $n = 1$)

2016. 12. 12.

Cél: $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $\rho(f) < \infty$ $(\Rightarrow \mu(f) < \infty)$

$$\Rightarrow f(z) = z^m \cdot \pi(z) \cdot e^{\varphi(z)} \qquad \text{(Hadamard)}$$

<u>Tétel</u> (Weierstrass-kanonikus szorzat leírása)

$\{z_j\}$ mint előbb, $\mu(\{z_j\}) < \infty$, $\mu(\{z_j\}) < \alpha$

$\Rightarrow \exists r_0 \geq 0$: $\forall r \geq r_0$: 1) $|\pi(z)| < \exp(r^\alpha)$, ha $|z| = r$;

2) $\exists t \in [r, 2r]$: $\forall |z| = t$: $\exp(-r^\alpha) < |\pi(z)|$.

<u>Köv.</u> A kanonikus szorzatra $\mu(\pi) = \rho(\pi)$, tehát π minimális rendű.

B:

$\mu(\pi) = \mu(\{z_j\}) \leq \rho(\pi)$ mindig fennáll.

1) szerint $\rho(\pi) \leq \alpha$ $\forall \alpha > \mu(\{z_j\})$

$\Rightarrow \mu(\pi) = \rho(\pi)$ $\square$

B_T: <u>1. lépés</u>. $\displaystyle\iint_{\mathbb{C}} \frac{|w|^\gamma}{|1-w|}\, dx\, dy < \infty$ fennáll $-2 < \gamma < -1-\varkappa$.

B_1: 3 kritikus pont: $1, 0, \infty$

- 0 körül: $0 < \varepsilon \ll 1$, $|w| < \varepsilon \Rightarrow |1-w| \geq c > 0$.

$$\Rightarrow \iint_{\{|w|<\varepsilon\}} \frac{|w|^\gamma}{|1-w|}\, dx\, dy \leq \frac{1}{c} \iint_{\{|w|<\varepsilon\}} |w|^\gamma\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{c} \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} r^\gamma \cdot r \cdot d\varphi\, dr = \frac{2\pi}{c} \int_0^\varepsilon r^{\gamma+1}\, dr < \infty, \text{ ha}$$

$\gamma + 2 > 0$, mert a prim. fv. $\dfrac{r^{\gamma+2}}{\gamma+2}$, $\gamma > -2$ fennáll.

- 1 körül: $|1-w| < \varepsilon \Rightarrow |w|^\gamma \leq c$.

$$\iint_{\{|1-w|<\varepsilon\}} \frac{|w|^\gamma}{|1-w|}\, dx\, dy \leq c \cdot \iint_{\{|1-w|<\varepsilon\}} \frac{1}{|1-w|}\, dx\, dy =$$

$$= c \cdot \iint_{\{|w|<\varepsilon\}} \frac{1}{|w|}\, dx\, dy = c \cdot \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \cdot r\, d\varphi\, dr < \infty$$

(Fontos: $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{1}{|x|}\, dx = \infty$, de 2 dimenziókban már nem.)

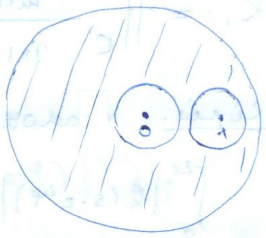
• ∞ körül: $\dfrac{|w|^{\gamma}}{|1-w|} = \dfrac{|w|^{\gamma-1}}{\left|1-\frac{1}{w}\right|}$, $|w| > R \gg 0$

$$\frac{1}{\left|1-\frac{1}{w}\right|} \leqq 2 \quad \text{ftn.} \Rightarrow \iint\limits_{\{|w|>R\}} \frac{|w|^{\gamma-1}}{\left|1-\frac{1}{w}\right|}\,dx\,dy \leqq$$

$$\leqq 2 \cdot \iint\limits_{\{|w|>R\}} |w|^{\gamma-1}\,dx\,dy = 2 \int_R^{\infty}\int_0^{2\pi} r^{\gamma-1} r\,d\varphi\,dr =$$

$$= 4\pi \int_R^{\infty} r^{\gamma}\,dr < \infty, \quad \text{ha} \quad \gamma+1<0, \text{ hisz a pr. fv. } \frac{r^{\gamma+1}}{\gamma+1}.$$

$\mathbb{C} \setminus \left(\{|w|>R\} \cup \{|w|<\varepsilon\} \cup \{|1-w|<\varepsilon\}\right)$ kompakt $\Rightarrow$ az integrandus korlátos. $\Rightarrow$ ✓



Emlék: $\dfrac{\pi'}{\pi}(z) = h(z) = \sum \dfrac{1}{1-z_j} - P_j(z)$

<u>2. lépés.</u> Elég kis α-ra belátni, mert α növelésével 1) és 2) szerint: elég tehát $n = [\mu] \leq \mu \lneqq \alpha < n+1$ -re.

Legyen $\mu < \beta < \alpha$. Ekkor $I = \iint\limits_{\mathbb{C}} \dfrac{|h(z)|}{|z|^{\beta+1}}\,dx\,dy < \infty$.

B2:

$$\frac{1}{z-z_j} = \frac{-1}{z_j} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{z_j}} = \frac{-1}{z_j} \cdot \Bigg(\underbrace{1 + \frac{z}{z_j} + \left(\frac{z}{z_j}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{z}{z_j}\right)^{n-1}}_{P_j(z)} + \left(\frac{z}{z_j}\right)^n + \ldots\Bigg)$$

$$\frac{1}{z-z_j} - P_j(z) = -\frac{1}{z_j}\left(\left(\frac{z}{z_j}\right)^n\left(1+\frac{z}{z_j}+\ldots\right)\right) = \frac{-1}{z_j} \cdot \frac{z^n}{z_j^n\left(1-\frac{z}{z_j}\right)} =$$

$$= \frac{z^n}{z_j^n(z-z_j)}$$

$$|I| = \iint_{\mathbb{C}} \frac{\left|\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^n}{z_j^n (z-z_j)}\right|}{|z|^{\beta+1}}\, dx\, dy = \sum_{j=1}^{\infty} \iint_{\mathbb{C}} \left|\frac{z^n}{z_j^n\,(z-z_j)}\right| \frac{1}{|z|^{\beta+1}}\, dx\, dy =$$

helyettesítés $\quad z = z_j w \quad (z_j \neq 0)$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \iint_{\mathbb{C}} \frac{|z_j|^{n-\beta-1}\,|w|^{n-\beta-1}}{|z_j|^n \cdot |z_j| \cdot |w-1|} \cdot |z_j|^2\, du\, dv =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \iint_{\mathbb{C}} \frac{1}{|z_j|^{\beta}} \cdot \frac{|w|^{n-\beta-1}}{|1-w|}\, du\, dv \qquad -2 < \gamma := n-\beta-1 < -1$$

1. lépés $\Rightarrow \iint < \infty$

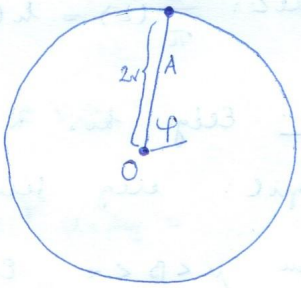
$$= \underbrace{\iint \cdots}_{<\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|z_j|^{\beta}}}_{<\infty,\ \text{mert}\ \mu<\beta}$$

2.

$$K_1 := \iint_{\mathbb{C}} \frac{|h(z)|}{|z|^{\beta+1}}\, dx\, dy < \infty.$$

3. lépés: r adott. $\Rightarrow \exists\, \varphi \in [0, 2\pi]$ szög, hogy

$$\int_0^{2r} |h(s \cdot e^{i\varphi})|\, ds < K_1 \cdot (2r)^{\beta} \cdot \frac{1}{2\pi}.$$



Speciálisan ebből: $A \neq z_j$, mert

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{|x|^k}\, dx = \infty, \ \forall k = 1, 2, \ldots$$

Triviálitás: $\int_a^b f(x)\, dx < K \rightarrow \exists\, x \in [a,b]: \quad f(x) < \frac{K}{b-a}$

Bg:

$$\iint_{\{|z|<2r\}} \frac{|h(z)|}{|z|^{\beta+1}}\, dx\, dy < \infty \qquad (2.\ \text{lépés})$$

polár

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2r} \frac{|h(s \cdot e^{i\varphi})|}{s^{\beta+1}}\, s\, ds\, d\varphi < \infty \qquad \left(\frac{1}{s^{\beta}} \searrow\right)$$

$$> \int_0^{2\pi} \frac{1}{(2r)^{\beta}} \int_0^{2r} |h(s \cdot e^{i\varphi})|\, ds\, d\varphi$$

$$K_1 \cdot (2r)^\beta > \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2r} |h(s\, e^{i\varphi})|\, ds \right) d\varphi$$

$$\Rightarrow \exists \varphi \in [0, 2\pi] : \quad \frac{K_1 (2r)^\beta}{2\pi} > \int_0^{2r} |h(s \cdot e^{i\varphi})|\, ds$$ 3

<u>4. lépés.</u> $r > 0$ adott $\rightarrow$ $\exists t \in [r, 2r]$: $\displaystyle\int_0^{2\pi} |h(t \cdot e^{i\varphi})|\, d\varphi < K_1 \cdot \frac{(2r)^\beta}{r}$

Spec.: $\{|z| = t\}$-n nincs egyetlen zj sem.

B_4:

$$K_1 > \iint_{\{r \le |z| \le 2r\}} \frac{|h(z)|}{|z|^{\beta+1}}\, dx\, dy = \int_r^{2r} \int_0^{2\pi} \frac{|h(s\, e^{i\varphi})|}{s^{\beta+1}}\, s\, d\varphi\, ds \geqslant$$

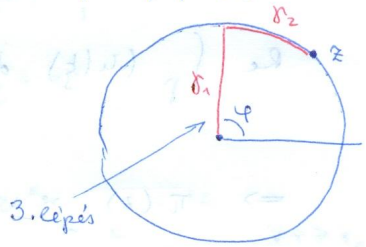
$\frac{1}{s^\beta}$ mon. csökken:

$$\geqslant \frac{1}{(2r)^\beta} \int_r^{2r} \int_0^{2\pi} |h(s\, e^{i\varphi})|\, d\varphi\, ds$$

$$\Rightarrow \exists t \in [r, 2r] : \quad \frac{K_1 (2r)^\beta}{r} > \int_r^{2r} |h(t\, e^{i\varphi})|\, d\varphi$$ 4

<u>5. lépés.</u> h becslése. $r > 0$, $t \in [r, 2r]$ (4. lépés), $|z| = t$.

$\Rightarrow$ h z-ben nem singuláris.



$$\pi(z) = \exp \int_\gamma h(\xi)\, d\xi$$

$$\gamma := \gamma_1 + \gamma_2$$

$$\int_\gamma h(\xi)\, d\xi = \int_{\gamma_1} h(\xi)\, d\xi + \int_{\gamma_2} h(\xi)\, d\xi$$

$$\gamma_1 : [0, t] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad s \longmapsto s \cdot e^{i\varphi},$$

$$\left| \int_{\gamma_1} h(\xi)\, d\xi \right| = \left| \int_0^t h(s \cdot e^{i\varphi})\, e^{i\varphi}\, ds \right| \le \int_0^{2\pi} |h(e^{i\varphi} \cdot s)|\, ds <$$

$$< K_1 \cdot \frac{(2r)^\beta}{2\pi}$$

$\gamma_2 : [\vartheta_1, \vartheta_2] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \vartheta \longmapsto t \cdot e^{i\vartheta}$

$$\int_{\gamma_2} h(\xi)\, d\xi = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} h(t \cdot e^{i\vartheta})\; t \cdot i \cdot e^{i\vartheta}\, d\vartheta$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\gamma_2} h(\xi)\, d\xi \right| \leq \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left| h(t \cdot e^{i\vartheta}) \right| t\, d\vartheta \leq$$

$$\leq t \cdot \int_0^{2\pi} \left| h(t \cdot e^{i\vartheta}) \right| d\vartheta \underset{\text{4 lépés}}{<} t \cdot K_1 \cdot \frac{(2r)^\beta}{r}$$

$$\Rightarrow \left| \int_\gamma h(\xi)\, d\xi \right| \leq \frac{K_1 \cdot (2r)^\beta}{2\pi} + \frac{K_1 \cdot t \cdot (2r)^\beta}{r} \leq$$

$$(t \leq 2r)$$

$$\leq K_1 \cdot \left(\frac{2^\beta}{2\pi} + 2^{\beta+1} \right) \cdot r^\beta =$$

$$= K_2 \cdot r^\beta .$$

$$|\pi(z)| = \exp \operatorname{Re} \int_\gamma h(\xi)\, d\xi$$

$$\operatorname{Re} \int_\gamma h(\xi)\, d\xi \leq \left| \int_\gamma h(\xi)\, d\xi \right| \leq K_2 \cdot r^\beta$$

$$\operatorname{Re} \int_\gamma h(\xi)\, d\xi \geq -K_2 \cdot r^\beta$$

$\Rightarrow \quad |z| = t$ -re: $\qquad e^{-K_2 r^\beta} < \pi(z) < e^{K_2 \cdot r^\beta}$

Maximumelv: $|z| = r$ esetén ugyanez a becslés áll fenn:

$$e^{-r^\alpha} < e^{-K_2 r^\beta} < \pi(z) < e^{K_2 \cdot r^\beta} < e^{r^\alpha},$$

ha $r \geq r_0$. $\Rightarrow$ 1) és 2) rövetkezik. $\square$

Tétel. (Hadamard) $0 \neq f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $\rho(f) < \infty$.

0 legyen f-nek m-szeresű zérushelye, a többi zh. $\{z_j\}$, ezekből kanonikus szorzat $\pi(z)$.

$\Rightarrow$ $f(z) = z^m \cdot \pi(z) \cdot e^{\varphi(z)}$, ahol $\varphi \in \mathbb{C}[z]$ és

$\deg \varphi = \rho(e^{\varphi})$, $\rho f = \max\left(\rho(e^{\varphi}), \rho(\pi(z))\right)$.

B: Tudjuk: $\mu(f) \leq \rho(f) < \infty$. $\Rightarrow$ $\pi(z)$ véges szorzat.

$$\frac{f(z)}{z^m \cdot \pi(z)} =: f_1(z). \quad \Rightarrow \quad f_1(z) \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C})$$

$\Rightarrow$ $\exists \varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$: $f_1 = e^{\varphi}$. A Weierstrass-becslés ahhoz kell, hogy φ polinom.

$\exists \alpha > \rho(f) \geq \mu(f) = \mu(\pi) = \rho(\pi)$. Alkalmazható a W-becslés:

$\exists r_0$: $\forall r \geq r_0$: $M(f_1, r) < \exp r^{\alpha}$ (1)-ből) és

$\exists t \in [r, 2r]$: $\forall |z| = t$: $\exp(-r^{\alpha}) < |\pi(z)|$ (2)-ből)

$\Rightarrow$ $|z| = t$-re $M(f_1, t) < M(f, 2r) < \exp(2r)^{\alpha}$,

$$|f_1(z)| < \frac{\exp(2r)^{\alpha}}{t^m \cdot \exp(-r^{\alpha})} \leq e^{2^{\alpha}} \cdot e^{2 \cdot r^{\alpha}}$$

$$M(f_1, r) \leq M(f_1, t) < e^{2^{\alpha}} \cdot e^{2r^{\alpha}} < e^{r^{\alpha+\varepsilon}} \quad \forall r \geq r_1$$

$\Rightarrow$ $\rho(f_1) \leq \alpha + \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$ $\Rightarrow$ $\rho(f_1) \leq \alpha$ $\Rightarrow$ $\rho(f_1) \leq \rho(f) < \infty$.

$\Rightarrow$ $\varphi \in \mathbb{C}[z]$ és $\deg \varphi = \rho(e^{\varphi}) = \rho(f_1) \leq \rho(f)$.

Ebből a felírás már következik, a fordítottbecslés kell míg. $\max\left(\rho(\pi), \rho(e^{\varphi})\right) \leq \rho(f)$ a fentiekből már következik.

Ha $h_1, h_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ $\Rightarrow$ $\rho(h_1 \cdot h_2) \leq \max\left(\rho(h_1), \rho(h_2)\right)$. (*)

Ennek alapján $\rho(f) \leq \max\left(\overbrace{\rho(z^m)}^{0}, \rho(\pi \cdot e^{\varphi})\right) =$

$$= \rho(\pi \cdot e^{\varphi}) \leq \max\left(\rho(\pi), \rho(e^{\varphi})\right).$$

Tehát már csak ezt az általános$^{(*)}$ állítást kell belátni.

Legyen $\max(\rho(h_1), \rho(h_2)) < \alpha$.

$\Rightarrow \exists r_0 : \forall r \geq r_0 : \quad M(h_1, r) < e^{r^\alpha}, \quad M(h_2, r) < e^{r^\alpha}$

$|z| = r, \quad |h_1(z) \cdot h_2(z)| < e^{2 \cdot r^\alpha} < e^{r^{\alpha+\varepsilon}} \quad \forall r \geq r_1$
$(\varepsilon > 0)$

$\Rightarrow \rho(h_1 \cdot h_2) \leq \alpha + \varepsilon$. Ez igazolja (*)-ot. $\square$

Tfh. $f \not\equiv$ konstans, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $\rho(f) < \infty$, $\rho(f) \notin \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow \rho(f) = \rho(\pi) = \mu(\pi) = \mu(f)$.

$\Rightarrow$ f-nek annyi gyöke van, amennyi csak lehetséges.

$a \in \mathbb{C}$-re:
$$\mu(f-a) = \rho(f-a) = \rho(f)$$
az előző okoskodás szerint.

$\Rightarrow$ f $\forall a$-t annyiszor veszi fel, ahányszor lehet.

<u>Tétel:</u> (Borel) $f \not\equiv c$, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $\rho(f) < \infty$ $\Rightarrow$ legfeljebb 1 kivétellel $\forall a \in \mathbb{C}$-re $\mu(f-a) = \rho(f)$.
(BN)

$\square$