Függvénysorozatok

pontonkénti konvergencia

egyenletes konvergencia

Folyt. függvények egyenletes limesze folyt.

Cauchy-kritérium

limesz felcserélhetősége

Ha $f_n \to f$ H-n, $a \in H$, f_n folyt. a-ban $\Rightarrow$ f folyt a-ban.

Ha f_n integrálható, akkor egyenletes limesze is.

Ha $f_n' \to g$, $\exists x_0$: $f_n(x_0)$ konvergens, f_n diffható $\Rightarrow$ $f_n \to f$, $f' = g$.

Függvénysorok és hatványsorok

pontonkénti konv. (2 def.)

e. konvergencia

Limesz felcserélhetősége

Folytonosak egyenletesen konvergáló sorának összege folytonos.

Integrálhatóság

Ha f_n diffható, $\sum f_n'$ e. konv. és $\exists x_0$: $\sum f_n(x_0)$ konv $\Rightarrow$ $\sum f_n$ e. konv, $(\sum f_n)' = \sum f_n'$

Cauchy-kritérium

Weierstrass-kritérium

Takagi-függvény. Mindenütt folytonos, sehol sem diffható

hatványsor

$\sum a_k x_0^k$ konv $\Rightarrow$ e. konv. $(-q|x_0|, q|x_0|)$-on

Abel-egyenlőtlenség

Dirichlet-kritérium

Lemma: $(a_1, \dots, a_n)$ monoton, $|b_1 + \dots + b_k| \le K$ $\forall k = 1, \dots, n$ $\Rightarrow$ $|a_1 b_1 + \dots + a_n b_n| \le (|a_1| + 2|a_n|)K$

Abel-kritérium

Abel tétele

Minden hatványsornak van konvergenciasugara.

Cauchy–Hadamard-formula

A konvergencia egyenletes a konv. tartomány $\forall$ korl. zárt részintervallumán

Az összegfüggvény folyt. a konv. tartományon.

Sor és tagonkénti deriváltjának konv. tartománya megegyezik.

Az összegfr. a konv. intervallum belsejében akárhányszor diffható, lehet tagonként deriválni.

Taylor-sor

Hatványsor az összege Taylor-sora

analitikus fv. (2 def.)

$\forall$ polinom anal $\mathbb{R}$-en

vac. fv. anal. az ért. tartományán

például

Ha hatványsor egy tartományon konv., akkor ott anal.

Ha f anal, $x_n \to x_0$ és $f(x_n)=0$ $\to$ $f \equiv 0$.

Anal. fv.-nek $\forall$ korl. z. nyílt intervallumon csak véges sok gyöke van, megsz. sok gyök az ö.t.-n.

Unicitástétel

$\exp(-\frac{1}{x^2})$ akárhányszor diffható R-en és $f^{(n)}(0)=0$. A 0-beli Taylor-sor csak 0-ban állítja elő.

Az f anal. I-n $\Leftrightarrow$ akárhányszor diffható és $|f^{(n)}(x)| \leq (Cn)^n$

$\binom{c}{n}$

Newton-sor

arcsin x hatványsora

Függvények metrikus terek között és euclidesi terek között

$\mathbb{R}^p$

$d(x,y)$

(X,d) metrikus tér

$B(a,r)$, $\bar{B}(a,r)$

belső pont, külső pont, határpont (példák)

térköz függőségre példa

nyílt halmaz

Nyílt.k tulajdonságai (halló)

zárt halmaz

Zártak tulajdonságai

$\bar{B}(a,r)$ zárt

összefüggő metrikus tér

Az euclidesi terek öf.ggők.

Ha $A \subset \mathbb{R}^p$, akkor $[a,b] \cap \partial A \neq \emptyset$

határérték m. térben (2 def.)

Konvergencia($\mathbb{R}^p$) $\Leftrightarrow$ koordinátánkénti konvergencia $\mathbb{R}$-ben.

Limesz és műveletek

korlátosság

Bolzano-Weierstrass

Tárt $\Leftrightarrow$ $\forall$ limesz benne van.

sűrű, ($\mathbb{Q}^p$ is az $\mathbb{R}^p$-ben)

separábilis. ($\mathbb{R}^p$ az)

Sep. részhalmaza sep.

Lindelöf-tétel

$\mathbb{R}^p$-ben nyílt rendszerben van megszámlálható részrendszere, ami fedi.

$\mathbb{R}^p$-ben bmely halmaznak megsz. sok izolált pontja van.

kompakt halmaz

Kompakt $\overset{\text{mt.}}{\Longleftrightarrow}$ zárt és sorozatkompakt

Kompakt $\Rightarrow$ zárt, sep., korl.

$\mathbb{R}^p$-ben kpt. $\Leftrightarrow$ korl., zárt

M.t.-ben kompaktok bmely végtelen részhalmaza nemüres => van torlódási pontja sen.

Cantor-tétel

torlódási pontok halmaza

izolált pontok halmaza

határérték m.terek között, speciálisan $\mathbb{R}$-be képező ∞ eset is

Átviteli elv határértékre

Limesz és műveletek $\mathbb{R}$-be képező függvényekre.

folytonosság

Átviteli elv folytonosságra.

Limesz és kompozíció

Cauchy-kritérium határértékre

$A \subset X$ kpt, f folytonos A-n => $f(A)$ kpt.

Az f folyt. A-n <=> $\forall G \subset Y$ nyílt-ra $f^{-1}(G) \subset X$ nyílt

Kompaktban folyt. felveszi a min/maximumát (Weierstrass)

Heine-tétel

A kpt., f folyt. és inj. => f^{-1} folyt. $f(A)$-n.

$\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvények differenciálása és ennek alkalmazásai

$\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ fv.

parciális deriváltak

lok. min/max., szigorú

Ha f-nek lok. min/max. van a-ban és $D_i f(a)$ $\exists$ => $D_i f(a) = 0$.

lineáris fv.

diffhatóság (totális)

Ha f diffható a-ban, akkor $\exists D_i f(a) < \infty$ $\forall i$, a lin. fv. $\sum D_i f(a) x_i$.

Diffhatóság => folytonosság.

$D_i f$

Ha $D_i f$ értelmes és folytonos a-ban egy kiterben $\forall i$ => f diffható a-ban.

Példák a nem megfordíthatóságra

érintőhipersík, gradiensvektor

irány menti derivált

$D_v f(a) = \langle f'(a), v \rangle$

Ha $f'(a) \neq 0$ => $|D_v f(a)| \leq |f'(a)|$ $\forall |v| = 1$

szakasz

$F(t) = f(a + t(b-a))$ diffható $[0,1]$-ben, $F'(t) = \langle f'(a) + t(b-a), b-a \rangle$

Lagrange-tét.

polinom

Young-tétel

differenciaoperátor Abel-csop. felett

kétszeres differenciálhatóság

$D_i D_j = D_j D_i$ <= kétszeres diffhatóság

k-szoros diffhatóság

n-szeres diffhatóságra felcserélhetőség

Taylor-polinom

k-adik differenciál

Taylor-formula

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{|x-a|^n} = 0$$

Kitüntetés diffhatóság és lokális szélsőértékek.

konvexitás

H konvex, miktra f konvex $\Leftrightarrow$ $f(x) \geq f(a) + \langle f'(a), x-a \rangle$

Konvex $\Leftrightarrow$ $d^2 f(a) \geq 0$

$\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvények

koordinátafv.

Határérték koordinátánként

Folytonos $\Leftrightarrow$ $\forall$ kfv. folyt.

Határérték és $\pm$.

lineáris fv.

diffhatóság

Diffhatóság $\Leftrightarrow$ $\forall f_j$ diffható.

A parc. deriváltak a lépésben.

Jacobi-mátrix

Parc. deriváltak $\exists$ $\underline{a}$ egy ersetben és folyt. $\underline{a}$-ban $\Rightarrow$ f diffh. $\underline{a}$-ban $\Rightarrow$ f folyt. $\underline{a}$-ban

és $\forall$ komponensének $\exists$ parc. deriváltja $\underline{a}$-ban

Diff. szabály $\pm$-ra és konst. szorzóra.

$\underline{A}$ Lipschitz

$\|A\|$

Láncszabály, következik az egyváltozós

$\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ láncszabály

k-adfokú homogén fv.

Euler-formula

Inverz deriváltja (nem teljesen)

folytonos diffhatóság

lok. inj. t.

Ált. Lagrange nem igaz.

lok. szürj. t.

teljes m.t.

Banach-fixponttétel

Inverzfv.-tétel

implicit fv.

Implicit fv. létezése szeletfüggvény monotonitásával

Implicit fv. parc. deriváltjai

Implicit fv.-tétel.

Feltételes szélsőérték

Lagrange-multiplikátor

Jordan-mérték

tégla, tégla térfogata

külső, belső mérték

e.n.m.h. halmaz

J-mérhetőség

$\mathcal{K}_n$ kockarács

$k_n(A)$, $b_n(A)$

$k_n(T) \to T$, $b_n(T) \to T$

$k_n(A) \to k(A)$, $b_n(A) \to b(A)$

$b(A) \le k(A)$, $k(A) = k(\mathrm{cl}\, A)$, $k(A) = b(A) + k(\partial A)$

k szubadditív, b szuperadditív

J-mérhetőség $\iff$ korlátos és $k(\partial A) = 0$

$\mathcal{J}_p$ halmazgyűrű

Additivitás, eltolásinvariancia, nemnegativitás, $t([0,1]^n) = 1$. (csak karakterizálnak)

H kpt., f folyt $\Rightarrow$ $k(\text{graph } f) = 0$.

Például, $\forall$ poliéder mérhető

paralelogramma, parallelepipedon

Parallelepipedon térfogata

Cantor-halmaz

parallelepipedon poliéder

lin. trafó és J-mérték (nagyítás)

ortogonális lin trf., távolságtartás

Távolságtartás $\iff$ $f(x) - f(0) = O_p$

egybevágóság, G_p

$G_p = \{\text{eltolás} \circ \text{ort.}\}$

J-mérték egybevágóságinvariáns.

Többszörös integrál

kétváltozós: m_{ij}, M_{ij}, s_F, S_F, $\underline{\int}_R$, $\overline{\int}_R$

integrálhatóság téglán

Ω_F,

korlátos és integrálható $\iff$ $\forall \varepsilon\ \exists F: \Omega_F < \varepsilon$.

$H \subset R$: $\underline{\int}_R \chi_H \, dxdy = b(H)$, $\overline{\int}_R \chi_H \, dxdy = k(H)$

Korlátos fv. nulmértékű ponttól eltekintve folyt. $\Rightarrow$ int. hatók R-en

Lebesgue-tétel

Integrálhatóság $\not\Rightarrow$ szelet integrálhatósága

normáltartomány

Norm. t. térfogata

p változós integrál tégelyen

Lebesgue-tétel (p+q)

$\mathbb{R}^3$-beli eset, Lövegy,

integrál homogén

Integrálfogalmak ekvivalenciája (NB)

súlypont

Mértéktranszf.

Mértéktranszf. általános esetben (NB)

Cantor-fv.

Mértéktranszf. p=q-ra (NB)

Mértéktranszf. formula (NB)

Integráltranszf. formula (NB)

Polkoord. helyettesítés injektív $(0,\infty)\times(0,2\pi)$-n

A mérhető $\Rightarrow$ $t(P(A)) = \int_A dr\,d\varphi$

A mérhető, $f: P(A)\to\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\int_{P(A)} f = \int_A (f\circ P)\, r\, dr\, d\varphi$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

Paraméteres integrálás

improprius integrál, $\int \frac{1}{x^c}$, majorálás, additivitás

$\Gamma(c)$

példák paraméteres integrálásra

Ha $f:[a,b]\times H\to\mathbb{R}$ folyt. és korl., akkor $F(t)=\int_H f(t,x)\,dx$ folytonos $[a,b]$-n

Ha f korl. és folyt. $\Rightarrow$ $\int_a^b F(t)\,dt = \int_H\int_a^b f(t,x)\,dt\,dx$

Ha f korl. és folyt, $\exists D_1 f$ és folyt. és korl. $\Rightarrow$ F diffható, $F'(t) = \int_H D_1 f\,dx$.

ellenpélda ∞ intervallumra

egyenletesen konvergens paraméteres integrál

Ha $f:[a,b]\times[c,\gamma]\to\mathbb{R}$ folyt és $\int_c^\gamma f(t,x)\,dx$ e. konvergens $\Rightarrow$ $F(t)=\int_c^\gamma f(t,x)\,dx$ folyt.

Ha f folyt, $\int_c^\gamma f(t,x)\,dx$ e. konv $\Rightarrow$ $\int_a^b F(t)\,dt = \int_c^\gamma\int_a^b F(t,x)\,dt\,dx$

Ha f folyt, $\exists D_1 f$ és folyt és $\int_c^\gamma D_1 f\,dx$ e. konvergens, $\Rightarrow$ F diffható, $F' = \int_c^\gamma D_1 f\,dx$
és $\exists F(t)\ \forall t$.

Weierstrass-kritérium

$\gamma_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Γ analitikus $(0,\infty)$-en, $\Gamma^{(k)}(t) = \int_0^\infty x^{t-1} (\log x)^k e^{-x}\, dx$

Γ szig. konvex, 0^+-ban és $+\infty$-ben ∞-be tart

Γ kiterjesztése negatívokra, szakadás a nemposz. egészekben

$s(x)$

$s(x)\cdot s(x+1) = -s(x)\cdot s(1-x) \Rightarrow s$ 2-periodikus

$s(x)\cdot s(1-x) = \sin(\pi x)/\pi$, azaz $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$

$$\int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{s-1}\,dx = \frac{\Gamma(t)\,\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)} \quad \forall\, t,s>0$$

$B(t,s)$

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^c}\,dx = \frac{\frac{\pi}{c}}{\sin\frac{\pi}{c}} \quad \forall c>1$$

Korlátos változású függvények

totális variáció, $V(f;[a,b])$

V_F

korlátos változású

f KV $\Leftrightarrow$ $f = g - h$ monotonok

Lipschitz $\Rightarrow$ KV

Ha f diffható és f' korl. $\Rightarrow$ f KV.

Stieltjes-integrál

$\int_a^b f\,dg$

$\exists$ f,g diffhatók, hogy $\nexists \int f\,dg$

$\sigma_F(f,g)$

Cauchy-kritérium

$\exists \int_a^b f\,dg \Rightarrow \exists \int_c^d f\,dg$

$\exists \int_a^b f\,dg \Rightarrow \int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg = \int_a^b f\,dg$

Ha f folyt., g KV $\Rightarrow \exists \int_a^b f\,dg$

Ha $\int_a^b f_1\,dg$ és $\int_a^b f_2\,dg$ $\exists \Rightarrow \int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2)\,dg = c_1 \int_a^b f_1\,dg + c_2 \int_a^b f_2\,dg.$

Ha $\int_a^b f\,dg_1$ és $\int_a^b f\,dg_2$ $\exists \Rightarrow \int_a^b f\,d(c_1 g_1 + c_2 g_2) = c_1 \int_a^b f_1\,dg + c_2 \int_a^b f_2\,dg$

Ha f R-inthető, g diffható, g' R-intható $\Rightarrow \exists \int_a^b f\,dg = \int_a^b f g'\,dx$

Parciális integrálás tétele

tg x és ctg x hatványsora

tg x-nek és ctg x - $\frac{1}{x}$-nek van hatványsora

k-replikativitás

ctg 2-replikatív (k-replikatív is $\forall k$)

Bernoulli-polinomok

$$\pi \operatorname{ctg}(\pi x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-n} \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$$

$\pi \operatorname{ctg}(\pi x) = \frac{1}{x} - 2(\zeta(2)x + \zeta(4)x^3 + \dots)$

$\pi \operatorname{tg}(\pi x) = (2^3-2)\zeta(2)x + (2^5-2)\zeta(4)x^3 + \dots$

$\zeta(2k)/\pi^{2k} \in \mathbb{Q} \quad \forall k$

$\zeta(2) = \pi^2/6$

Megjegyzések továbbiakról