BSc algebra 4, matematikus szakirány — 2016. tavasz
1. gyakorlat: febr. 9.

1. (a) Tegyük föl, hogy R olyan gyűrű, amelynek minden eleme *idempotens*: $(\forall r \in R)\, r^2 = r$. Mutassuk meg, hogy akkor R kommutativ (*Boole-gyűrű*), és $\forall r \in R$: $2r = r + r = 0$. (char $R = 2$)

02.16. (b)* Tegyük föl, hogy R olyan egységelemes gyűrű, amelyben $(\forall r \in R)\, r^3 = r$. Mutassuk meg, hogy akkor R kommutativ, és (char R) | 6. eseles számolás

2. (a) Legyen H halmaz, és legyen minden $a, b \subseteq H$-ra $a + b = (a \cup b) \setminus (a \cap b)$ és $a \cdot b = a \cap b$. Mutassuk meg, hogy H részhalmazainak a halmaza Boole-gyűrű ezekre a műveletekre.

   (b) Létezik-e megszámlálhatóan végtelen Boole-gyűrű? (Ilyet a) nem ad.)

3. Igazoljuk, hogy ha van egységelem, akkor az összeadás kommutativitása következik a többi gyűrűaxiómából.

4. Legyen $n \geqslant 2$. Az $n \times n$-es valós mátrixok gyűrűjében tekintsük azoknak a diagonális mátrixoknak a halmazát, amelyeknek a jobb alsó eleme nulla. Igazoljuk, hogy ez részgyűrű. Van-e egységeleme? (Van háztáji egységelem.)

5. (a) Egy R gyűrű pontosan akkor nullosztómentes, ha $R[x]$ az.

   (b) Tegyük föl, hogy $f(x) \in R[x]$ jobb oldali nullosztó (azaz van olyan $0 \neq g(x) \in R[x]$, amire $g(x)f(x) = 0$). Mutassuk meg, hogy akkor van olyan $0 \neq c \in R$ is, amire $cf(x) = 0$. Lehet, hogy csak kommutatívra igaz?

6. Legyen R egységelemes gyűrű, a, $b \in R$. Tegyük föl, hogy $(1 - ab)$-nek van balinverze. Mutassuk meg, hogy akkor $(1 - ba)$-nak is van balinverze.

02.16. 7. (a) Legyen p prim. Hány p elemű gyűrű van? eseles számolás

   *(b) Hány négyelemű gyűrű van? sok eset (rögzített összeadás mellett mi lehet a szorzás?)

02.16. 8. Adjunk meg olyan gyűrűt, amelyben egynél több, de csak véges sok balegységelem van.

(Jobbegységre nem igaz.)

Zérógyűrű: $(\forall a, b \in R)\ ab = 0$

BSc algebra 4, matematikus szakirány — 2016. tavasz
2. gyakorlat: febr. 16.

1. Jelölje a $\mathbb{Z}_{2016}$ gyűrűben A a (2) ideált. Határozzuk meg az $A \cdot A$ ideál elemeit, és hasonlítsuk össze $A \cdot A$-t $A \cap A = A$-val.

2. Legyen R nullosztómentes gyűrű, A és B pedig 0-tól különböző ideáljai R-nek. Mutassuk meg, hogy $A \cap B \neq 0$. Igaz-e, hogy egy ilyen gyűrűben akárhány nemnulla ideál metszete is 0-tól különböző?

3. Jelölje Z_{2^∞} a 2-hatványadik komplex egységgyökök csoportját (a komplex számok szorzására mint műveletre). Tegyük föl, hogy egy gyűrű additív csoportja izomorf Z_{2^∞}-nel. Mi lehet ebben a gyűrűben a szorzás?

4. Mik az $F[[x]]$ ideáljai, ha F (kommutatív) test?

(Állítás: csak a zérógyűrű)
Hint: $Z_{2^\infty} = \{0, \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{a}{8}, \pm\frac{b}{16}, \dots\}$ /mo
additív felírás
Minden elem osztható 2-vel.

02-23. 5. (a) Igazoljuk, hogy $\dfrac{x}{e^x - 1} + \dfrac{x}{2}$ páros függvény.

(b) Mutassuk meg, hogy

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n-1}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k\right) = 1$$

esetén $0 = B_3 = B_5 = B_7 = \dots$.

02-23. 6. Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű. A formális hatványsorokhoz hasonlóan *formális Laurent-soroknak* nevezzük az olyan formális

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n \quad (a_i \in R)$$

kifejezéseket, amelyekben x-nek csak véges sok negatív kitevős hatványa szerepel (nemnulla együtthatóval). Az összeadást és szorzást „értelemszerűen" definiálva igazoljuk, hogy így kommutatív, egységelemes gyűrűt kapunk. Mi annak a feltétele, hogy ez a gyűrű nullosztómentes, ill. test legyen?

02-23. 7. Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű és $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in R[x]$. Mi annak a feltétele, hogy f egység legyen $R[x]$-ben? [Vizsgáljuk először $n = 1$-re majd $n = 2$-re.]

02-23. 8. Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$, $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1) \cong \mathcal{G}$ (a Gauss-egészek gyűrűje). Adjunk meg olyan I ideálokat, amelyekre $\mathbb{Z}[x]/I$ test.

BSc algebra 4, matematikus szakirány — 2016. tavasz
3. gyakorlat: febr. 23.

1. Jelölje S a racionális számok additív csoportján értelmezett zérógyűrűt. Mik ennek a gyűrűnek az ideáljai? Van-e benne maximális ideál?

2. Mi lehet egyszerű gyűrűk direkt összegének a Jacobson-radikálja?

3. (a) Ha $A \lhd R$ és $A \subseteq B \lhd R$, akkor $R/B \cong (R/A)/(B/A)$.

(b) Igazoljuk, hogy $J(R/J(R)) = 0$. (ez az általános radikáltulajdonság)

4. Legyen F test. Határozzuk meg az $F[[x]]$ gyűrű nilradikálját és Jacobson-radikálját.

ötl. ezen

5. (a) Tegyük föl, hogy $a \in J(R)$. Igazoljuk, hogy akkor minden $r \in R$-re $1 - ar \in U(R)$ (azaz $1 - ar$ invertálható).

(b) Tegyük föl, hogy M egy maximális ideál, és $a \notin M$. Mutassuk meg, hogy akkor van olyan $s \in R$, amelyre $1 - as \in M$.

R kommutatív

6. Legyen R egységelemes gyűrű, kommutatív.

(a) Igazoljuk, hogy $(x) \subseteq J(R[[x]])$.

(b) Mutassuk meg, hogy $J(R[[x]]) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mid a_0 \in J(R) \right\}$.

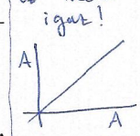
7. Tegyük fel, hogy T_1, T_2, ..., T_k egységelemes gyűrűk, és R ezeknek a gyűrűknek a direkt összege. Mutassuk meg, hogy a T_j gyűrűk egységelemeinek összege egységeleme R-nek, és $I \lhd R \iff I = I_1 \oplus I_2 \oplus \ldots \oplus I_k$, ahol $I_j \lhd T_j$. Hogyan néznek ki az R maximális ideáljai, mit mondhatunk $J(R)$-ről?

Hint: vetítés.

(Csoportelméleti analogon: direkt összeg ∀ komponensének az összeadandóiz nO.-inak direkt összegeként.)

8. Tegyük fel, hogy a kommutatív R gyűrűben minden olyan ideál, amely nem része a nilradikálnak, tartalmaz nullától különböző idempotenst. Bizonyítandó, hogy $J(R) = N(R)$. (Azt tudjuk, hogy $J(R) \supseteq N(R)$.)

ez nem igaz!



Ellenpélda: $A \oplus A$-ban a jobbró.

9. Tegyük fel, hogy R-ben minden x elemhez van olyan $n = n(x) > 1$ egész, amelyre $x^n = x$. Mutassuk meg, hogy R-ben minden prímideál maximális.

10. Ha R-ben van n nilpotens elem, $1 \in R$, és R kom., akkor $N(R) \subseteq J(R)$, azaz $n \in J(R)$.

BSc algebra 4, matematikus szakirány — 2016. tavasz
4. gyakorlat: márc. 1.

A feladatokban szereplő R gyűrűk kommutatívak és egységelemesek, minden modulus unitális.

1. (a) Ha M egy (bal oldali) R-modulus, $N \leqslant M$ és $\overline{M} = M/N$, akkor

$$\{\overline{M} \text{ részmodulusai}\} = \{V/N \mid N \leqslant V \leqslant M\}.$$

(b) Mutassuk meg, hogy féligegyszerű (bal oldali R-) modulus faktormodulusai is féligegyszerűek (azaz minden részmodulusuk direkt összeadandó).

2. Mutassuk meg, hogy egy féligegyszerű modulus minden részmodulusa benne van egy maximális részmodulusban. Tudjuk: minden f.c. nemnulla modulusban van egyszerű részmodulus.

3. Igazoljuk, hogy $J(R)$ nem lehet nemtriviális direkt összeadandója R-nek.

4. Tegyük föl, hogy R Artin-gyűrű. Mutassuk meg, hogy $R/J(R)$ részgyűrű véges sok egyszerű test Artin-gyűrű direkt összegében.

5. Legyen R Noether-gyűrű. Mutassuk meg, hogy ekkor $R[[x]]$ is Noether.

6. Legyen $A = \left\{ \begin{bmatrix} k & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ és $B = \left\{ \begin{bmatrix} r & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{Q} \right\}$. Ekkor A és B gyűrű a mátrixszorzásra. Melyikük bal-artin, jobb-artin, bal-noether, illetve jobb-noether?

BSc algebra 4, matematikus szakirány — 2016. tavasz
5. gyakorlat: márc. 8.

1. Mutassuk meg, hogy tetszőleges R kommutatív egységelemes gyűrűre és G véges csoportra

$$A := \left\{ \sum_{g\in G} \lambda_g g \in RG \mid \sum_{g\in G} \lambda_g = 0 \right\}$$

augmentation ideal

ideál RG-ben. Mivel izomorf RG/A? R-vel.

2. (a) Igazoljuk, hogy $\mathbb{Z}Z_3$ -ban csak „triviális" egységek vannak ($\{\pm a \mid a \in Z_3\}$). → $r \in U(R)$, $a \in G$: ra triv egység

(b) Adjunk meg nemtriviális egységeket $\mathbb{Z}Z_5$-ben.

(c) Határozzuk meg az egységeket $\mathbb{Q}Z_n$-ben. Különböző a)-ból és b)-ből. $RZ_n = \{\sum_{i=0}^{n-1} r_i c^i \mid r_i \in R\}$, $Z_n = \langle c \rangle$, $RZ_n \cong R[x]/(x^n-1)$

3. Legyen R egységelemes gyűrű. Egy S ideál *nilpotens*, ha létezik olyan $n > 1$ egész, amelyre $S^n = 0$, azaz minden, az S elemeiből képezett n-tényezős szorzat nulla. Mutassuk meg, hogy ha S nilpotens ideál, akkor része $J(R)$-nek.

$\mathbb{Q}[x]$-ben van maradékos osztás!

4. Legyen $G \neq 1$ véges csoport, $1 \in R$. Mutassuk meg, hogy RG-ben létezik nullosztó. Miértani soros gondolat: $(1 + c + \dots + c^{n-1}) \cdot (1 - c) = c^n - 1 = 1 - 1 = 0$.

Z_n

5. Legyen G véges csoport, F test, és tegyük fel, hogy F karakterisztikája osztója $|G|$-nek. Keressünk FG-ben 0-tól különböző nilpotens főideált.

6. (a) Igazoljuk, hogy $\mathbb{C}(Z_2 \times Z_2)$-ben létezik negyedrendű elem. (Sőt, belátható, hogy $\mathbb{C}Z_4 \cong \mathbb{C}(Z_2 \times Z_2)$.) → Ezt majd WA-szerkezettétellel, direktben belátni reménytelen. ronda számolás

(b) Létezik-e negyedrendű elem $\mathbb{R}(Z_2 \times Z_2)$-ben?

2.(c)-ben tekintsük a faktorgyűrűt, és nézzük azt, hogy mely mellékosztályok ennek egységei: $\{(x^n-1) + g \mid g \in \dots\} = \mathbb{Q}[x]/(x^n-1)$

5. $a = ?$: $a \neq 0$, $a \in Z(FG)$, a nilpotens lence jó/ kellene. (Így elkerüljük a szép főideálfeltételt)

$z \in Z(RG) \iff zg = gz \ \forall g \in G$, ha R kommutatív (ea)

(érdemes szélsőséges kombinációkat nézni)

„Hogy néznek ki egy nemkommutatív gyűrűben a főideálok? Egy szóval: rondán."

BSc algebra 4, matematikus szakirány — 2016. tavasz
1. ZH: márc. 22.

Minden feladat 1 *pontot ér, az adható részpontszámok* 0.1 *többszörösei. A dolgozat osztályzata a pontszámok (kerekítés nélküli) összege.*

✓ **1.** Legyen R egységelemes gyűrű, $J(R)$ az R Jacobson-radikálja. Mutassa meg, hogy $J(R)$ csoport az $a \odot b \stackrel{\text{def}}{=} a + b - ab$ műveletre. 1p

2. Milyen K testre és véges G csoportra lesz a KG csoportalgebra egyszerű (gyűrű)? 0p

✓ **3.** Jelölje R az n elemű X halmaz részhalmazainak gyűrűjét (a szimmetrikus differenciával mint összeadással és a metszettel mint szorzással). Hány ideálja van R-nek? 1p

✓ **4.** Legyen F test. Mik az $F[[x]]$ (az F fölötti formális hatványsorok gyűrűjének) idempotensei? (b idempotens $:\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow}: b^2 = b$) 1p

✓ **5.** Jelölje egy tetszőleges R gyűrű centrumát $\mathrm{Z}(R)$. Igazoljuk, hogy ha minden $r \in R$-re $r^2 - r \in \mathrm{Z}(R)$, akkor R kommutatív. 1p

6. Legyen R egységelemes kommutatív gyűrű, A pedig minimális ideál R-ben. Mutassuk meg, hogy ha A nem zérógyűrű (azaz létezik $x, y \in A$, hogy $xy \neq 0$), akkor A test. 0,7p

✓ **7.** Nevezzük egy M modulus N részmodulusát *lényegesnek*, ha minden $L \leqslant M$ részmodulusra $N \cap L = 0$ -ból $L = 0$ következik, és S-et nevezzük *felesleges* részmodulusnak M-ben, ha $S + L = M$-ből $L = M$ következik. Adjunk példát olyan részmodulusra egy alkalmas $M \neq 0$ modulusban, ami egyszerre lényeges es felesleges. 1p

Σ 5,7p

BSc algebra 4, matematikus szakirány — 2016. tavasz
6. gyakorlat: ápr. 5.

1. Határozzuk meg $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ kanonikus polinomját $\mathbb{Q}$ fölött.

2. **(a)** Legyen az F testnek $F(t)$ transzcendens bővítése. Mutassuk meg, hogy ennek minden F-en kívüli eleme transzcendens F fölött.

(b) Legyen $p(x) = p_0 + p_1x + \ldots + p_nx^n \in F[x]$ egy n-edfokú polinom (nem 0) nem konstans $n \geqq 1$ és $a := p(t)$. Algebrai vagy transzcendens-e t az $F(a)$ test fölött? Amennyiben algebrai (:-) , mi a kanonikus polinomja?

3. Tegyük föl, hogy β algebrai egész, n pedig pozitív egész. Igazoljuk, hogy $\sqrt[n]{\beta}$ is algebrai egész.

4. Legyenek $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ algebrai egészek, és

$$f(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1x + c_0.$$

Jelölje az f egyik komplex gyökét β. Mutassuk meg, hogy β is algebrai egész.

5. Jelölje R a $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ gyűrűt. Irreducibilis, illetve prím-e az R-ben a 7, illetve a 11?

6. **(a)** Igazoljuk, hogy létezik végtelen sok 1 abszolút értékű algebrai egész, ami nem egységgyök.

(b) Tegyük föl, hogy γ algebrai egész, $|\gamma| = 1$, és γ előállítható egységgyökök összegeként. Mutassuk meg, hogy γ egységgyök. A háttérben testbővítés van.

7. Adjuk meg a 6 felbontásait irreducibilis elemek szorzatára $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$-ban és $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$-ban.

UFD

nem UFD

„A algebrai egészség és az 1 kapcsolata."

β algebrai egész $\iff (\mathbb{Z}[\beta], +)$ végesen generált

BSc algebra 4, matematikus szakirány — 2016. tavasz
7. gyakorlat: ápr. 12.

1. Legyen p prím, n és k pedig pozitív egész. Igazoljuk, hogy a p^n elemű F testnek pontosan akkor létezik p^k elemű részteste, ha $k \mid n$. Utóbbi esetben hány p^k elemű részteste van F-nek?

2. Legyen p prím, F pedig p^n elemű test. Hány olyan $x^2 + ax + b \in F[x]$ polinom létezik, amelynek van gyöke F-ben?

3. Határozzuk meg egy véges test összes nemnulla elemének
   (a) összegét;
   (b) szorzatát.

4. Legyen F véges test, $0 \neq a, b, c \in F$. Mutassuk meg, hogy az $ax^2 + by^2 = c$ egyenletnek létezik megoldása F-ben.

04.26. 5. Legyen F véges test, $|F| = p^n$ (p prím), és legyen $g(x) \in F[x]$ k-adfokú, F fölött irreducibilis polinom. Határozzuk meg a $g(x)$ polinom F fölötti felbontási testét.

04.26. 6. Legyen L egy p-karakterisztikájú test, $L \leqslant M$. Tegyük föl, hogy $a \in M$, és a szeparábilis $L(a^p)$ fölött. Mutassuk meg, hogy ekkor $a \in L(a^p)$.

04.26. 7. Legyen T tetszőleges test, $h(x) \in T[x]$ pedig irreducibilis T fölött. Mutassuk meg, hogy ($h(x)$ felbontási testében) $h(x)$ mindegyik gyökének egyenlő a multiplicitása.

BSc algebra 4, matematikus szakirány — 2016. tavasz

11. heti gyakorlat: ápr. 19.

8. gyakorlat feladatsor

1. A hálóra adott kétféle definíció ekvivalens.

2. Hány, legfeljebb négyelemű részbenrendezett halmaz, ill. legfeljebb hatelemű háló létezik?

3. Mutassuk meg, hogy ha egy részbenrendezett halmazban minden részhalmaznak van szuprémuma, akkor minden részhalmaznak van infimuma is. ún. teljes háló

4. Egy háló *disztributív,* ha a $\wedge$ és $\vee$ műveletek mindegyike disztributív a másikra nézve. Mutassuk meg, hogy e két tulajdonság bármelyikéből következik a másik.

5. Egy L háló *moduláris,* ha $a, b, c \in L$ és $a \geq b$ esetén $a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)$. Mutassuk meg, hogy L pontosan akkor moduláris, ha $a, b, c \in L$ és $a \leq b$ esetén $a \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c)$, ill. ha minden $a, b, c \in L$ esetén $(a \vee b) \wedge (b \vee c) = b \vee ((a \vee b) \wedge c)$. Igazoljuk továbbá, hogy minden disztributív háló moduláris.

6. Moduláris, ill. disztributív hálót alkot-e egy csoport összes részcsoportjának, ill. összes normálosztójának a (tartalmazás szerinti) részbenrendezett halmaza?

04.026. 7. Határozzuk meg az $L|K$ bővítés Galois-csoportját, ha p prím, ε primitív p-edik egységgyök, és

(a) $K = \mathbb{Q}(\varepsilon)$ és $L = K(\sqrt[p]{2})$;

(b) $K = \mathbb{Q}$ és $L = K(\varepsilon)$;

(c) $K = \mathbb{Q}(\sqrt[p]{2})$ és $L = K(\varepsilon)$.

BSc algebra 4, matematikus szakirány — 2016. tavasz

12. heti gyakorlat: ápr. 26.

9. feladatsor

1. Mik azok a hálók, amelyeknek minden részhalmaza részháló?

2. Igaz-e, hogy minden, legalább ötelemű véges hálónak létezik ötelemű részhálója?

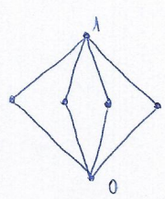
3. Hogy néznek ki azok a véges csoportok, amelyek normálosztó-hálójában minden elemnek létezik komplementuma? Lehet-e ilyenkor a normálosztóháló disztributív?

   ↳ $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$ ↳ ha igen: mikor?

4. Az S_7 szimmetrikus csoportban jelölje H a 7 stabilizátorát (vagyis azon permutációk alkotta részcsoportot, amelyeknél a 7 fix). Mutassuk meg, hogy H-nak létezik $\mathrm{L}(S_7)$-ben komplementuma.

5. Legyen $n \geqslant 4$ pozitív egész.
   (a) Adjunk meg olyan G csoportot, amelyre $\mathrm{L}(G)$-nek létezik M_n-nel izomorf részhálója.
   (b) Tegyük föl, hogy G olyan csoport, melyre $\mathrm{L}(G) \cong M_n$. Mutassuk meg, hogy $n-3$ vagy 1, vagy prímszám.
   (c) Mi lehet az n, ha egy véges test összes résztesteinek a hálója izomorf M_n-nel?

M_n:



itt n az elemek száma
(de mondás úgy is, hogy a köztitsű elemek száma n)

BSc algebra 4, matematikus szakirány — 2016. tavasz

14. heti gyakorlat: máj. 10.

10. feladatsor

1. Legyenek J és K a B Boole-algebra prímideáljai, melyekre $J \subseteq K$. Mutassuk meg, hogy akkor $J = K$.

2. Legyen $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ irreducibilis n-edfokú polinom. Tegyük föl, hogy $p(x)$ (felbontási testének a) Galois-csoportja kommutatív. Igazoljuk, hogy ekkor a Galois-csoport rendje n. $\longrightarrow$

3. Legyen α az $x^3 - 12x + 8$ polinom egyik (komplex) gyöke. Mutassuk meg, hogy ekkor $\dfrac{\alpha^2}{2} - 4$ is gyöke ugyanennek a polinomnak. Ez 10/4.-re szolgáló példa.

4. Legyen $\mathbb{Q} \leqslant K \leqslant \mathbb{C}$, és $p(x) = x^3 + px + q \in K[x]$ irreducibilis K fölött. Bizonyítandó: $p(x)$ (K fölötti) felbontási teste pontosan akkor harmadfokú bővítése K-nak, ha $\underbrace{-(4p^3 + 27q^2)}_{D = \left(\prod_{i<j}(x_i - x_j)\right)^2}$ egy K-beli elem négyzete.

$x_1, \dots, x_n$ a gyökök multiplicitásszal ($\mathbb{C}$-ben)

2. $\longrightarrow$ $r(x) = \prod_{i<j} (x - t_i)$ irred. K felett

$\sigma \in G = Gal(F|K)$

$\Rightarrow$ ① $t_i^\sigma = t_j$ $(\forall i \, \exists j)$

② G tranzitívan permutálja a gyököket

$q(x) = \prod_{\sigma \in G} (x - t_1^\sigma)$ $\longrightarrow$ $(r, q) \neq 1$, mert t_1 közös gyök $\longrightarrow$ $\boxed{r(x) \mid q(x)}$

$\downarrow$

az együtthatók elemi szimm. polinomjai a gyököket, és σ nem változtat az egészen

$\longrightarrow$ $r(x)$ irreducibilis

$\longrightarrow$ $q(x) \in K[x]$

$\longrightarrow$ Gal-elmélet alaptétele: $q(x) \in G^\circ[x]$, de $G^\circ = K$

Visszavezetés csoportelméletre: $G \leq S_n$, G tranzitív és Abel $\Rightarrow$ G reguláris

$\Downarrow$

$|G| = n$

BSc algebra 4, matematikus szakirány — 2016. tavasz
2. ZH: május. 3.

Minden feladat 1 *pontot ér, az adható részpontszámok* 0.1 *többszörösei. A dolgozat osztályzata a pontszámok (kerekítés nélküli) összege.*

✓ **1.** Adja meg $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$-ben 8 összes, lényegesen különböző felbontását irreducibilis elemek szorzatára. 1p

2. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

✓ **(a)** Ha α algebrai egész és $|\alpha| = 1$, akkor $\dfrac{1}{\alpha}$ is algebrai egész. 0.5p

(b) Ha β és $\dfrac{1}{\beta}$ algebrai egész, akkor $|\beta| = 1$. 0p

3. Határozza meg $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ kanonikus polinomját $\mathbb{Q}$ fölött. 0.3p

4. Határozza meg a $\mathbb{Q}(\beta) \mid \mathbb{Q}$ testbővítés fokát, ahol

$$\beta = \frac{3}{7}\sqrt[15]{4} + \frac{4}{9}\sqrt[15]{2} - 2016\,.$$

0.5p

✓ **5.** Hány 11-edfokú irreducibilis polinom van a kételemű test fölött? 0.2p

✓ **6.** Bizonyítsa be, hogy egy L háló pontosan akkor moduláris, ha teljesül rá a következő: Minden $a, b, c \in L$ esetén $(a \wedge b \leqslant c \leqslant a) \Longrightarrow a \wedge (b \vee c) = c$. 1p

✓ **7.** Létezik-e olyan csoport, amelynek a részcsoport-hálója izomorf az alábbival? 1p

Σ 4.5p