1

Algebra1 Intenzív verzió

1. gyakorlat

2014. szeptember 11.
12.

1. Végezzük el az alábbi műveleteket: $(1+i)/(3-2i)$, $|\overline{(4+i)}/(4+i)|$, i^n (n egész).

2. Hol a hiba a következő levezetésben?

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = i\cdot i = -1.$$

Nincs „jó" definíció $\sqrt{-1}$-re. $\mathbb{C}$-ben a $\sqrt{\ }$-nél nincs értelme valamelyiket kitüntetni.

3. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok között: $x = (3+2i)\overline{x}$, $x = 2\mathrm{Re}(x)$, $x^2 + 2ix - 1 = 0$.

4. Határozzuk meg azokat a $c + di$ számokat, melyek négyzete $20i - 21$. Oldjuk meg az $x^2 + (i-2)x + (6-6i) = 0$ egyenletet.

5. Milyen geometriai alakzatot írnak le a sík alábbi részhalmazai: [1] $\{z\colon \mathrm{Re}(z+2i) \le -2\}$, [2] $\{z\colon \mathrm{Re}(z+1) \ge \mathrm{Im}(z-3i)\}$, [3] $\{z\colon |z-i-1| \le 3\}$, [4] $\{z\colon |z-3+2i| = |z+4-i|\}$, [5] $\{z\colon z+\overline{z} = -1\}$, [6] $\{z\colon 2z+5 = 2\overline{z}\}$, [7] $\{z\colon 1/z = \overline{z}\}$, [8] $\{z\colon 1/z + 8 = \overline{z}\}$, [9] $\{z\colon |z| = iz\}$, [10] $\{z\colon \mathrm{Im}((z-1)/(z+1)) = 0\}$, [11] $\{z\colon \mathrm{Re}((z-1)/(z+1)) = 0\}$?

6. Igazoljuk, hogy a paralelogramma oldalhosszainak négyzetösszege megegyezik az átlók hosszának a négyzetösszegével.

7. Bármely komplex z és w számra $|zw| = |z||w|$ és $|z+w| \le |z| + |w|$.

8. Tekintsük az $\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ halmazt a modulo m összeadással és szorzással ellátva. Mely m pozitív egészek esetén lesz ez test?

9. Testet alkotnak-e azok a komplex számok, amelyeknek valós és képzetes része is racionális?

10. (a) Mutassuk meg, hogy $\sqrt{2}$ irracionális.

    (b) Mutassuk meg, hogy minden valós szám legfeljebb egyféleképpen írható $a + b\sqrt{2}$ alakba, ahol a és b racionális.

    (c) Testet alkotnak-e azok a valós számok, amelyek felírhatók $a + b\sqrt{2}$ alakban, ahol a és b racionális?

    (d) Oldjuk meg az (a), (b), (c) kérdést $\sqrt{2}$ helyett $\sqrt{3}$-mal és $\sqrt[3]{2}$-vel is.

11. (a) Mutassuk meg, hogy bármely két komplex a_1 és a_2 számhoz van olyan 1 abszolút értékű z komplex szám, amelyre $|1 + a_1 z + a_2 z^2| \ge 1$.

    (b) Általánosítsunk!

    $\forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}\ \exists z \in \mathbb{C},\ |z| = 1 \to |1 + a_1 z + \ldots + a_n z^n| \geq 1.$

2

Algebra1 Intenzív verzió

2. gyakorlat

2014. szeptember 18–19.

1. Írjuk fel az alábbi komplex számokat trigonometrikus alakban: $1-i$, $-1-\sqrt{3}i$, $\cos\alpha - i\sin\alpha$, $\sin\alpha + i\cos\alpha$, $(1+i\tan\alpha)/(1-i\tan\alpha)$.

2. Fejezzük ki $\cos x$ és $\sin x$ segítségével $\sin 7x$-et! Általánosítsunk! KISS 1.5.24.

3. Hozzuk zárt alakra a

$$\sum_{m=0}^{n} \sin mx$$

összeget!

4. Írjunk egy háromszög mindegyik oldalára kifelé egy szabályos háromszöget. Igazoljuk, hogy ezek középpontjai szabályos háromszöget alkotnak.

5. Lefedhető-e a 100×100-as sakktábla 8×1-es dominókkal?

6. Tekintsük az 1, -1, i, $1+i$, $(1+i)/\sqrt{2}$, $\cos(\sqrt{2}\pi) + i\sin(\sqrt{2}\pi)$, $\cos(336°) + i\sin(336°)$ számokat! Melyek ezek közül egységgyökök? Mely n-ekre lesznek n-edik egységgyökök? És primitív n-edik egységgyökök?

7. Mennyi az n-edik egységgyökök szorzata? És a négyzetösszege? KISS 1.5.22.

8. Szorozzunk össze egy hatodik és egy negyedik egységgyököt minden lehetséges módon. Hány különböző számot kapunk? KISS 1.5.20

9. Legyenek m és n pozitív egészek!

   a) Hány közös gyöke van az $x^n = 1$ és az $x^m = 1$ egyenletnek?

   b) Igazoljuk, hogy egy m-edik és egy n-edik egységgyök szorzata mindig mn-edik egységgyök!

   c) Milyen m és n párra lesz egy primitív n-edik és egy primitív m-edik egységgyök szorzata primitív mn-edik egységgyök?

10. Oldjuk meg az $x^3 = 2$, $x^4 = -9$, $x^7 = \sqrt{3} + i$, $x^9 = 1 + i$, $x^n = -1$ egyenleteket a komplex számok között!

11. Van-e kilencelemű test?

ZH: november 6., december 11. 14:00, Északi tömb 0.87 Marx terem.

3

Algebra1 Intenzív verzió

3. gyakorlat

2014. szeptember 25-26.

1. Végezzük el az alábbi szorzásokat: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Igaz-e az $n \times n$-es mátrixok körében az $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ azonosság?

3. Egy négyzetes mátrixot felső (alsó) háromszög-mátrixnak nevezünk, ha a főátló alatt (felett) az összes elem 0. Bizonyítsuk be, hogy egy gyűrű feletti $n \times n$-es felső háromszög-mátrixok (a szokásos mátrixszorzással és -összeadással) gyűrűt alkotnak!

4. Az alábbi struktúrák gyűrűk-e? Ha igen, kommutatívak-e, egységelemesek-e, nulloszt-ó-mentesek-e, testek-e?

   a) $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, $\{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, $\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.

   b) Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények halmaza a pontonkénti összeadásra és szorzásra.

   c) Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények halmaza a pontonkénti összeadásra és a kompozícióra, mint szorzásra.

   d) Egy X halmaz összes részhalmaza, ahol az összeadás a szimmetrikus differencia képzése, a szorzás pedig a metszetképzés. (Két halmaz szimmetrikus differenciája azokból az elemekből áll, amelyek a két halmaz közül pontosan egyben vannak benne.)

   e) A 3-dimenziós tér vektorai az összeadásra és a (*i*) skaláris (*ii*) vektoriális szorzásra nézve.

5. A $g, h \in S_n$ permutációkat *felcserélhetőnek* mondjuk, ha $gh = hg$.

   (a) Az S_3 mely elemei cserélhetők fel az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

   permutációval?

   (b) Igazoljuk, hogy ha $g, h \in S_n$, és nincs olyan elem, amelyet g és h is elmozdít, akkor g és h felcserélhető.

6. Ha egy csoportban minden elem négyzete az egységelem, akkor a csoport kommutatív.

Algebra1 Intenzív verzió

4. gyakorlat

2014. október 2-3.

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok n-edik hatványát és annak determinánsát:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Legyen $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ egy 2×2-es mátrix. Bizonyítsuk be, hogy

$$M^2 - (a+d)M + (\det M)I = 0,$$

ahol I az egységmátrix.

3. Oldjuk meg az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 17 & 5 \end{pmatrix}$ egyenletet a 2×2-es mátrixok körében!

4. Hogyan változik egy mátrix determinánsa, ha

   (a) tükrözzük a mellékátlóra? nem változik

   (b) elforgatjuk $+90°$-kal a középpontja körül? $(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ - szerese változik

   (c) tükrözzük a középpontra? nem változik

5. Az S_8 alábbi elemei közül melyek egyenlők? $(145)(63)(78)$, $(2)(514)(87)(36)$, $(541)(63)(78)$

6. Határozzuk meg az alábbi permutációk ciklusfelbontását, inverziós számát és paritását!

$$\begin{pmatrix} 12345678 \\ 85247361 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 12345678 \\ 85243761 \end{pmatrix}.$$

7. Egy permutáció ciklusfelbontásából hogyan határozható meg a rendje?

8. Legyen π és ρ az S_n két eleme. Igazoljuk, hogy ha egyetlen olyan elem van, amelyet π és ρ is elmozdít, akkor π és ρ nem felcserélhető.

9. Mely $\pi \in S_n$ permutációk cserélhetők fel az $(12 \cdots n)$ ciklussal?

10. Ha $\pi \in S_n$, akkor π előáll transzpozíciók szorzataként. Legalább hány tényező kell egy adott π permutáció ilyen előállításához?

11. Van-e minden $0 \le k \le \binom{n}{2}$ esetén olyan $\pi \in S_n$, amelyben az inverziók száma k ?

12. Ha $\pi \in S_n$, akkor π előáll $(i, i+1)$ alakú transzpozíciók szorzataként. Legalább hány tényező kell egy adott π ilyen előállításához?

Algebra1 Intenzív verzió

5. gyakorlat

2014. okt. 9-10.

1. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét (ω az első harmadik egységgyök).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Az utolsó hármat általánosítsuk n-szer n-es mátrixokra.

2. Legfeljebb mennyi lehet egy 3×3-as, csupa 0-ból és 1-ből álló mátrix determinánsa?

3. Mutassuk meg, hogy ha egy $n \times n$-es mátrixban minden sorösszeg és minden oszlopösszeg is nulla, akkor

   (a) a determináns nulla;

   (b) az $(n-1) \times (n-1)$-es előjeles aldeterminánsok mind egyenlők.

4. Legyen $A \in M_n(\mathbb{C})$ és $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ minden i-re és j-re. Mit mondhatunk $\det A$-ról?

   önadjungált mátrix → valós

5. Egy mátrixot antiszimmetrikusnak mondunk, ha transzponáltja az ellentettje. Mit mondhatunk antiszimmetrikus mátrix determinánsáról?

6. Bizonyítsuk be, hogy ha M egy olyan $n \times n$-es felső háromszög-mátrix, amelynek a főátlójában is csupa 0 van, akkor $M^n = 0$. Először lássuk be 2×2-es mátrixokra.

Algebra1 Intenzív verzió

1. ZH

2014. november 6.

1. Ha $z \neq -1$ komplex szám, akkor legyen

$$z^* = \frac{1-z}{1+z}.$$

Cayley-transzformáció

(a) Mutassuk meg, hogy $* : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ bijekció.

(b) Mikor lesz $|z^*| = 1$?

2. Legyen p prím és ε primitív p-edik egységgyök. Mennyi a

$$\sum_{j=0}^{p-1} \varepsilon^{j^2}$$

összeg abszolútértéke?

3. Oldjuk meg a 2×2 méretű valós mátrixok körében a

$$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

egyenletet.

4. Legfeljebb mennyi lehet egy 3-szor 3-as, csupa 1-ből és (-1)-ből álló mátrix determinánsa?

5. Számítsuk ki annak az $n \times n$ méretű determinánsnak az értékét, amelyben a főátló minden eleme 2, a főátlótól eggyel fölfelé vagy eggyel lefelé lévő elemek mindegyike 1, a többi elem 0.

6. Igaz-e, hogy az $M_2(\mathbb{F}_5)$ mátrixgyűrű

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$$

alakú elemei 25 elemű testet alkotnak?

7. Hány olyan páros permutáció van S_6-ban, amelynek a rendje páros?

Algebra1 Intenzív verzió

6. gyakorlat

2014. okt. 16-17.

1. Legyen K test $a, b, c, d \in K$, $ad - bc \neq 0$. Mi az $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix inverze?

2. Mi az $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ mátrix inverze?

3. Mikor lesz egy egész elemű $n \times n$-es invertálható mátrix inverze is egész elemű?

4. Mely $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ mátrixokra teljesül $AB - BA = I$?

5. Az $\mathbb{R}^2$ síkon bármely parallelogramma előjeles területe az oldalvektoraiból mint oszlopokból képzett 2×2 méretű mátrix determinánsa.

6. Egy n elemű halmaznak legfeljebb hány páratlan elemszámú részhalmaza választható ki úgy, hogy bármely kettő metszete páros elemszámú legyen?

7. b) Igazoljuk, hogy ha egy egységelemes gyűrűben egy elemnek pontosan egy balinverze van, akkor ez jobboldali inverz is.

8. Igazoljuk, hogy ha egy egységelemes gyűrűben egy elemnek legalább két balinverze van, akkor végtelen sok balinverze van.

9. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egységelemes R gyűrűben az r elem nilpotens (azaz valamely hatványa nulla), akkor van olyan $s \in R$, hogy $s(1-r) = (1-r)s = 1$.

10. Hány invertálható elem van az $a + b\sqrt{2}$ alakú számok gyűrűjében, ahol a és b egészek?

11. Lehet-e egy csoport izomorf egy valódi részcsoportjával?

7. a) Ha egy gyűrűben pontosan 1 balegységelem van, akkor az jobbegységelem is

ZH: november 6., december 11. 14:00, Északi tömb 0.87 Marx terem.

2014. XI. 14.

Algebra1

7. feladatsor

1. Mutassuk meg, hogy az $M_2(\mathbb{C})$ mátrixgyűrű

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

alakú elemei egy $\mathbb{H}$-val izomorf ferdetestet alkotnak. Következik-e ebből, hogy $\mathbb{H}$-ban a szorzás asszociatív?

2. Tetszőleges α és β kvaterniókra $\overline{\alpha\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha}$.

3. Határozzuk meg az összes olyan kvaterniót, amely minden kvaternióval felcserélhető.

a kvaterniók centruma $Z(\mathbb{H}) = \{\alpha \in \mathbb{H} \mid \forall \beta \in \mathbb{H}\ \alpha\beta = \beta\alpha\} = \mathbb{R}$

Az $a + bi + cj + dk$ kvaternió valós része *a. Egy kvaternió* tisztán képzetes, *ha valós része nulla.*

4. Igaz-e, hogy tisztán képzetes kvaterniók szorzata is az?

5. A tisztán képzetes kvaterniók terét azonosítsuk $\mathbb{R}^3$-mal úgy, hogy i, j, k a kanonikus bázisnak feleljen meg. Mi a tisztán képzetes kvaterniók szorzásának geometriai jelentése?

6. Határozzuk meg az összes olyan kvaterniót, amelynek a négyzete -1.

7. Adjunk példát arra, hogy a Cayley-számok szorzása nem asszociatív.

8. Legyen $(R, +)$ Abel-csoport és $\cdot : R \times R \to R$ olyan szorzás, amely disztributív $+$ felett. Mutassuk meg, hogy ha $(aa)b = a(ab)$ és $a(bb) = (ab)b$ teljesül minden $a, b \in R$ esetén, akkor $(ab)a = a(ba)$ is teljesül minden $a, b \in R$ esetén.

9. A $\mathbb{Q}[x]$ gyűrűben határozzuk meg az $f(x) = 5x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ és $g(x) = 2x^5 - 9x^4 + x^2 - 1$ polinomok legnagyobb közös osztóját, és írjuk fel a legnagyobb közös osztót a két adott polinom lineáris kombinációjaként (azaz $uf + vg$ alakban, ahol $u, v \in \mathbb{Q}[x]$).

10. Határozzuk meg $\mathbb{Z}[x]$-ben az x és a 2 polinomok összes közös osztóját. Van-e legnagyobb közös osztó? Ha igen, felírható-e a legnagyobb közös osztó x és 2 lineáris kombinációjaként (azaz $u(x)x + v(x)2$ alakban, ahol $u, v \in \mathbb{Z}[x]$)?

11. A $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ gyűrűben $3 - 7\sqrt{5}$ és $-113 - 51\sqrt{5}$ asszociáltak.

14:00

2. ZH: december 11. csütörtök 2:00.

Algebra1 Intenzív verzió

8. gyakorlat

2014. november 20–21.

1. Legyen p prím, $f \in \mathbb{Z}[x]$ egy n-edfokú polinom. Legyen $\overline{f} \in \mathbb{F}_p[x]$ az f modulo p véve. Az alábbiak közül melyek igazak?

   (a) Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{F}_p$ felett, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett. hamis

   (b) Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{F}_p$ felett, és $\overline{f}$ foka n, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett. igaz

2. (Fordított Schönemann–Eisenstein-kritérium) Legyen $f \in \mathbb{Z}[x]$ nem konstans polinom. Igazoljuk, hogy ha létezik olyan p prím, amelyre

   a) p nem osztja f konstans tagját;

   b) p osztja f összes többi együtthatóját;

   c) p^2 nem osztja f főegyütthatóját,

   akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

3. Irreducibilisek-e az alábbi polinomok a $\mathbb{Q}$ test felett?

   $3x^7 - 6x^6 + 6x^2 + 3x - 2$, $3x^7 + x^6 + 6x^2 + 2x - 2$, $3x^7 - 6x^6 + 6x^2 + 2x - 2$, $x^{16} + 1$, $x^{16} + 2$, $x^4 - 14x^2 + 9$, $x^4 - x^2 + 1$, $3x^7 + 6x - 18$, $x^5 + 4$, $x^3 + 9$, $x^5 + 729$, $x^{10} - x^5 + 1$, $x^{20} + 20$, $x^4 + 25$, $x^4 + 8$, $x^6 + 32$, $x^4 + 4x + 1$, $x^4 - 2x + 1$, $x^4 + x^3 + 1$, $x^4 + x^3 + 4$, $x^4 + x^3 + x^2 + 1$.

4. Mutassuk meg, hogy ha $n \geq 2$, akkor az n-edik körosztási polinom együtthatóinak sorozata palindrom (visszafelé írva önmagát kapjuk). reciprok polinom

5. Írjuk fel a körosztási polinomokat a 16-odikig.

6. Igazoljuk, hogy ha $n > 1$ páratlan, akkor $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$.

7. Határozzuk meg Φ_n konstans tagját, illetve együtthatóinak összegét.

8. Legyenek $m \mid n$ pozitív egészek úgy, hogy n minden prímosztója osztja m-et is. Igazoljuk, hogy $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$. Számítsuk ki a prímhatvány-indexű körosztási polinomokat.

Algebra1 Intenzív verzió

9. gyakorlat

2014. november 27–28.

1. Legyen K test és $f, g \in K[x]$.
   (a) $(f \circ g)' = ?$
   (b) $(fg)^{(k)} = ?$

2. Lehet-e egy $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{F}_p$ felett irreducibilis polinomnak többszörös gyöke egy nagyobb testben? Igaz-e $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{F}_p$ felett, hogy ha az f polinomra $(f, f') \neq 1$, akkor van olyan g irreducibilis polinom, hogy $g^2 \mid f$?

3. Legyen $f \in K[x]$, ahol K test. Az $f(x+y) \in K[x,y] = K[x][y]$ polinomban a $K[x]$ melyik eleme lesz y együtthatója?

4. Hogyan függ össze egy valós együtthatós, 1 főegyütthatójú polinom diszkriminánsának előjele a valós gyökök számával? (Fel szabad használni az algebra alaptételét.)

5. Legyen $H(y_1, y_2, y_3) = 30y_1y_3^3 - y_2^5$. Helyettesítsük be mindegyik y_i helyére a megfelelő $\sigma_i(x_1, x_2, x_3)$ polinomot, és adjuk meg az eredmény egy nem nulla tagját.

6. Számítsuk ki a $2x^4 + 2x + 3$ polinom négy komplex gyökének összegét, szorzatát, négyzetösszegét, valamint e gyökök reciprokainak összegét.

7. Határozzuk meg az $x^n + x + 1$ polinom (komplex) gyökeinek köbösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét ($n \geq 2$).

8. Legyenek a, b, c az $x^3 + 3x + 1$ polinom gyökei. Írjuk föl azt a két harmadfokú, 1 főegyütthatójú polinomot, melynek gyökei a^2, b^2, c^2, illetve $a+b, a+c, b+c$.

9. Igaz-e végtelen test fölött a többváltozós polinomok azonossági tétele (vagyis hogy a polinomfüggvény egyértelműen meghatározza a polinomot)?

Algebra1 Intenzív verzió

2. zh

2014. december 11.

1. Határozzuk meg a $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix inverzét.

2. Oldjuk meg a kvaterniók körében az $x^2 = i$ egyenletet.

3. Legyen d egész, de nem négyzetszám, x, y, u, v egészek, $x^2 - dy^2 = u^2 - dv^2$. Következik-e ebből, hogy $x + y\sqrt{d}$ és $u + v\sqrt{d}$ asszociáltak az $a + b\sqrt{d}$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ alakú számok gyűrűjében?

4. Legyen K test és $p, q, r, s \in K[x]$. Tegyük fel, hogy p és q legnagyobb közös osztója 1.

   (a) Mutassuk meg, hogy van olyan $f \in K[x]$, amelyre $f - r$ osztható p-vel és $f - s$ osztható q-val.

   (b) Mutassuk meg, hogy bármely két ilyen f különbsége osztható pq-val.

5. Mely a egész számokra irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett az $x^4 + a$ polinom?

6. Mennyi a $2x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 2x + 1$ polinom négy komplex gyökének a köbösszege?

7. Mutassuk meg, hogy ha p és q különböző prímek, akkor

$$\Phi_{pq}(x) = \frac{\Phi_q(x^p)}{\Phi_q(x)}.$$

Algebra1 Intenzív

Pótzh/Gyakjegy UV

1. Írjunk egy négyszög minden oldalára kifelé egy négyzetet. Kössük össze a szemközti oldalakra írt négyzetek középpontjait. Mutassuk meg, hogy a kapott két szakasz egyenlő hosszú és merőleges egymásra.

2. Mutassuk meg, hogy S_n minden eleme előáll az (12) és $(12\ldots n)$ ciklusokból ismételt szorzásokkal.

3. Határozzuk meg a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix inverzét.

4. Határozzuk meg az összes olyan kvaterniót, amelynek a négyzete 2.

5. Felbontható-e az $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 1$ polinom két alacsonyabb fokú racionális együtthatós polinom szorzatára?

6. Legyenek p, q és r páronként különböző prímek. Igazoljuk, hogy

$$\Phi_{pqr}(x) = \frac{(x^{pqr}-1)(x^p-1)(x^q-1)(x^r-1)}{(x^{pq}-1)(x^{qr}-1)(x^{rp}-1)(x-1)}.$$